

Terminale ES

Convexité

## Convexité

## I Fonction convexes, fonctions concaves

## Définitions

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}$  est sa courbe représentative dans un repère.

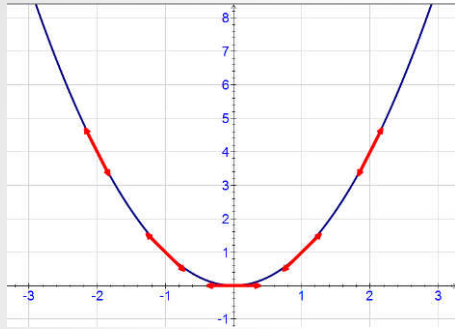
- Dire que  $f$  est **convexe** sur  $I$  signifie que sur  $I$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- Dire que  $f$  est **concave** sur  $I$  signifie que sur  $I$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

# TES

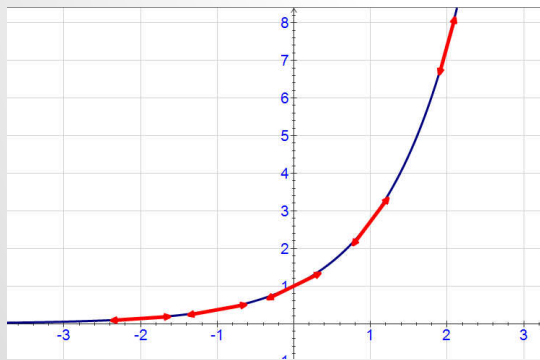
## Convexité

### Exemples

- La fonction  $x \rightarrow x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .



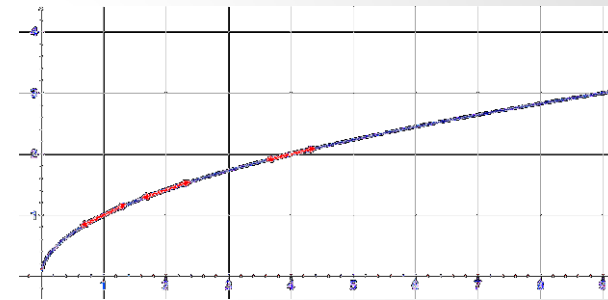
- La fonction  $x \rightarrow e^x$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .



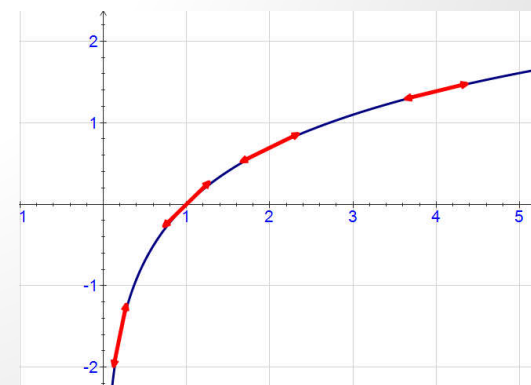
## Convexité

### Exemples

- La fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est concave sur  $\mathbb{R}$ .



- La fonction  $x \rightarrow \ln x$  est concave sur  $]0; +\infty[$ .



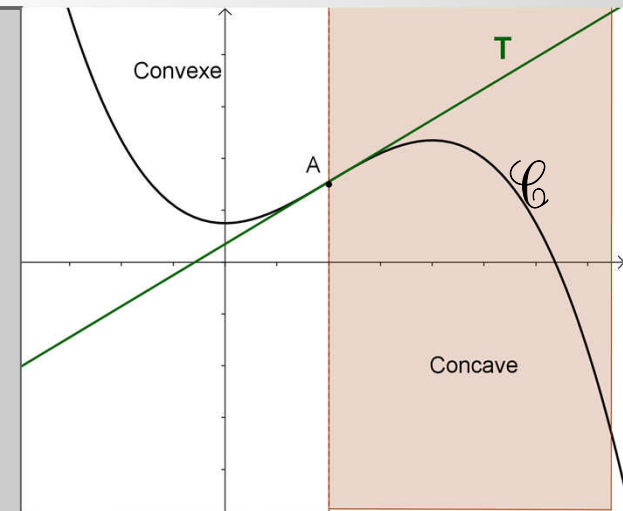
## Convexité

## II Point d'inflexion

## Définition

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .  
 $\mathcal{C}$  est sa courbe représentative dans un repère  
et  $a \in I$ .

Dire que  $A(a; f(a))$  est un **point d'inflexion** de  $\mathcal{C}$   
signifie qu'en  $A$  la courbe  $\mathcal{C}$  traverse sa  
tangente.

**Conséquence :**

En l'abscisse  $a$  d'un point d'inflexion,  $f$  passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

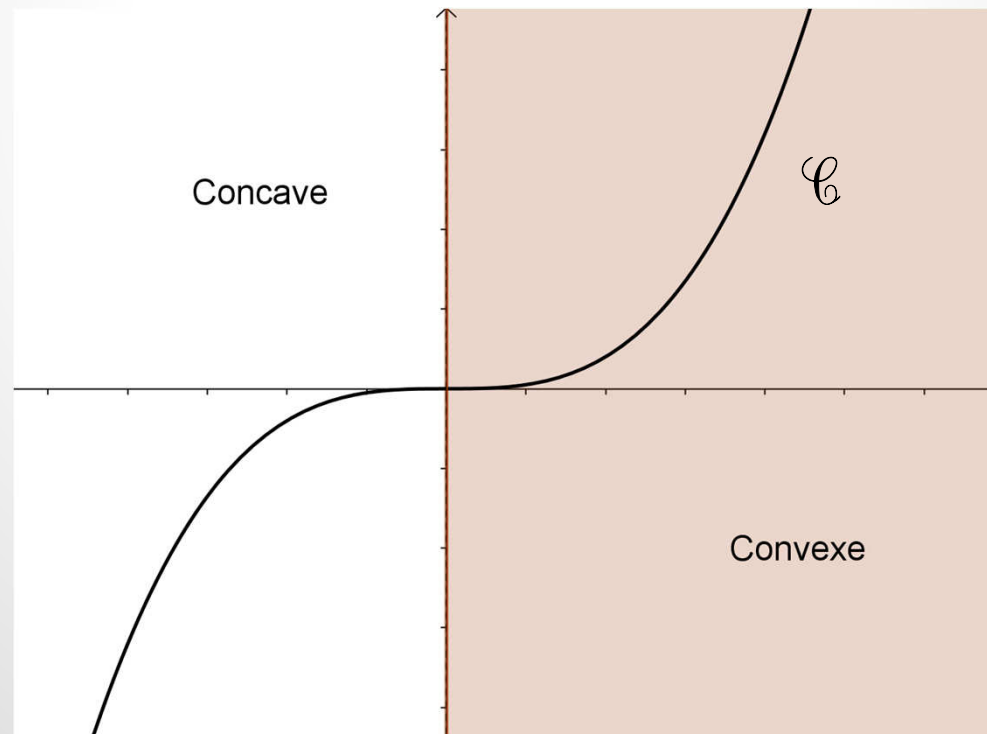
## Convexité

**Exemple :**

$u$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = x^3$ .

L'origine  $O$  du repère est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $u$ .

$u$  est concave sur  $] - \infty; 0]$  et convexe sur  $[0; + \infty[$ .



## Convexité et dérivées

III Convexité et sens de variation de  $f'$ 

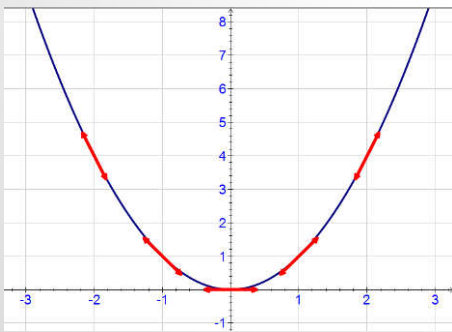
## Propriétés

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

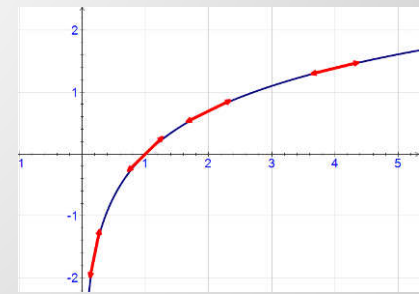
- $f$  est **convexe** sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est **croissante** sur  $I$ .
- $f$  est **concave** sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est **décroissante** sur  $I$ .

Exemple

- La fonction  $f: x \mapsto x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour  $x$  réel,  $f'(x) = 2x$  et la fonction  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Exemple

- La fonction  $f: x \mapsto \ln x$  est concave sur  $]0; +\infty[$ .  
Pour  $x$  réel,  $f'(x) = \frac{1}{x}$  et la fonction  $f'$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$ .



## Convexité et dérivées

IV Convexité et signe de  $f''$ 

## Définitions

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Dire que  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  signifie que  $f'$  est elle-même dérivable sur  $I$ .

La dérivée de  $f'$ , notée  $f''$ , est appelée dérivée seconde de  $f$ .

Exemple

Pour tout  $x$  réel,  $f(x) = x^3$ .

$f'(x) = 3x^2$  et  $f''(x) = 6x$

## Propriétés

$f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est **convexe** sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f''(x) \geq 0$ .
- $f$  est **concave** sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f''(x) \leq 0$ .

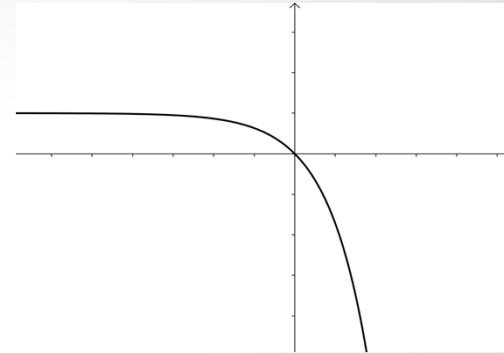
## Convexité et dérivées

**Exemple**

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - e^x$ .

$f'(x) = -e^x$  et  $f''(x) = -e^x < 0$ .

$f$  est donc concave sur  $\mathbb{R}$ .

**V Point d'inflexion et dérivée seconde****Propriété**

$f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

$\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère et  $a \in I$ .

Le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$ , si et seulement si,  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe.

## Convexité et dérivées

Exemple

$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3$ .

$f'(x) = 3x^2$  et  $f''(x) = 6x$ .

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$

On retrouve le fait, que l'origine  $O$  du repère représente un point d'inflexion de la courbe de  $f$ .

## Positions relatives de courbes

## VI Une propriété de la fonction exponentielle

## Propriété

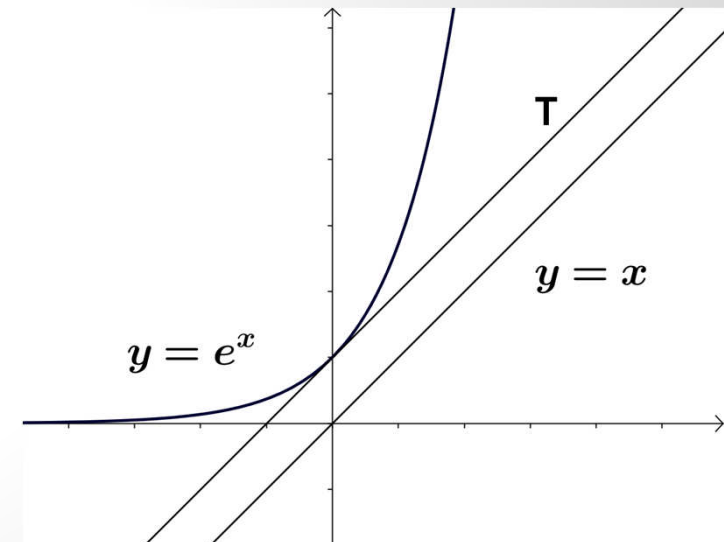
Pour tout nombre réel  $x$ ,  $e^x > x$ .

## Démonstration

La fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$ ,  
donc, dans un repère, sa courbe  $\mathcal{C}$  est au dessus  
de toutes ses tangentes.

En particulier,  $\mathcal{C}$  est au dessus de sa tangente  $T$   
au point d'abscisse 0 d'équation  $y = x + 1$ .

Ainsi pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq x + 1 > x$ .



## Positions relatives de courbes

## VII Une propriété de la fonction logarithme népérien

## Propriété

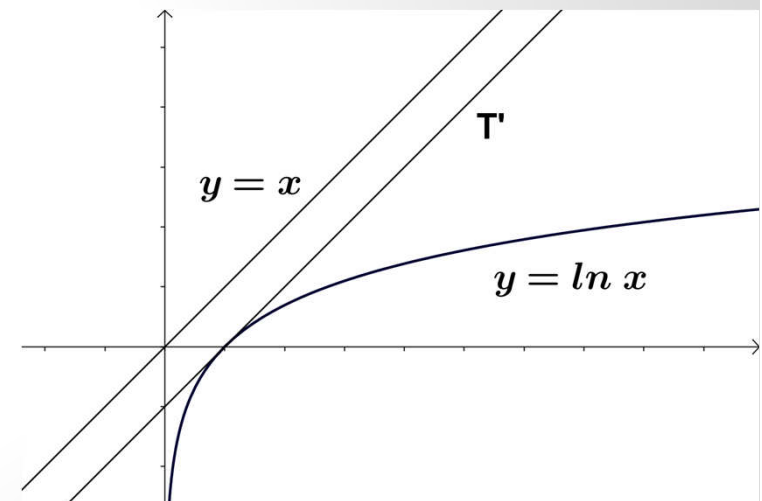
Pour tout nombre réel  $x > 0$ ,  $\ln x < x$ .

## Démonstration

La fonction logarithme népérien est concave sur  $]0; +\infty[$  donc, dans un repère, sa courbe  $\mathcal{C}$  est en dessous de toutes ses tangentes.

En particulier,  $\mathcal{C}$  est au dessus de sa tangente  $T'$  au point d'abscisse 1 d'équation  $y = x - 1$ .

Ainsi pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln x \leq x - 1 < x$ .



## Positions relatives de courbes

## VIII Conséquences graphiques

Il résulte des deux propriétés précédentes, que dans un repère :

- la courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation  $y = x$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- la courbe représentative de la fonction logarithme népérien est en dessous de la droite d'équation  $y = x$  sur  $]0; +\infty[$ .

