

Terminale ES

Probabilités conditionnelles

Conditionnement par un évènement

I Probabilité de B sachant A

Définition 1

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

A et B sont deux évènements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'évènement B sachant A , notée $P_A(B)$, est définie

$$\text{par : } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple

Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A , dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes.

Un appareil choisi au hasard présente la panne A . La probabilité pour qu'il ait aussi la panne B est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,3} = 0,1$$

II Probabilité de $A \cap B$

Propriété 1

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω .

A et B sont deux évènements avec $P(A) \neq 0$.

Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemple

Tous les élèves de terminale d'un lycée ont passé un test de certification en anglais.

(1) 80% ont réussi le test.

(2) Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.

(3) Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les évènements T : « L'élève a réussi le test » et D : « L'élève a déjà redoublé ».

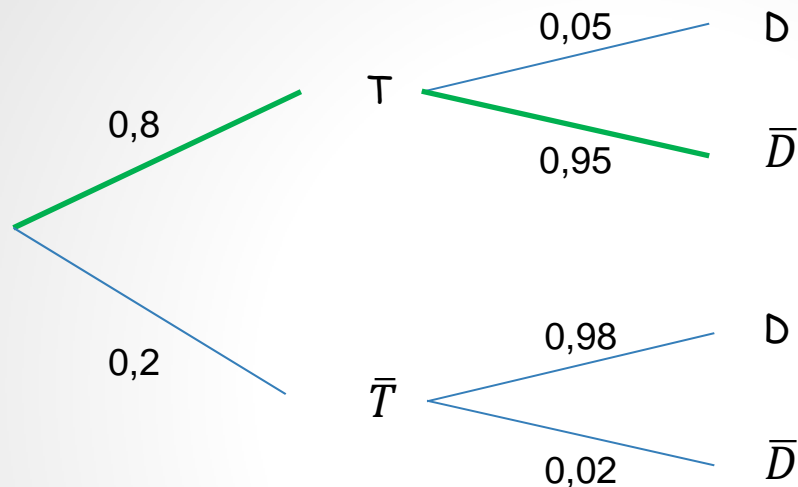
Alors (1) se traduit par $P(T) = 0,8$.

(2) se traduit par $P_T(\bar{D}) = 0,95$ et (3) par $P_{\bar{T}}(\bar{D}) = 0,02$.

La probabilité de l'évènement : « L'élève a réussi le test et n'a jamais redoublé » est : $P(T \cap \bar{D}) = P(T) \times P_T(\bar{D}) = 0,8 \times 0,95 = 0,76$.

III Représentation par un arbre pondéré

On peut représenter l'exemple précédent par l'arbre pondéré ci-dessous :



en respectant les règles suivantes :

1. Sur les branches du 1^{er} niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.
2. Sur les branches du 2^{ème} niveau, on inscrit des **probabilités conditionnelles**.
3. La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
4. Le **produit** des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'**intersection** de ces évènements.

Ainsi pour le chemin en vert, on a $P(T \cap \bar{D}) = 0,8 \times 0,95$.

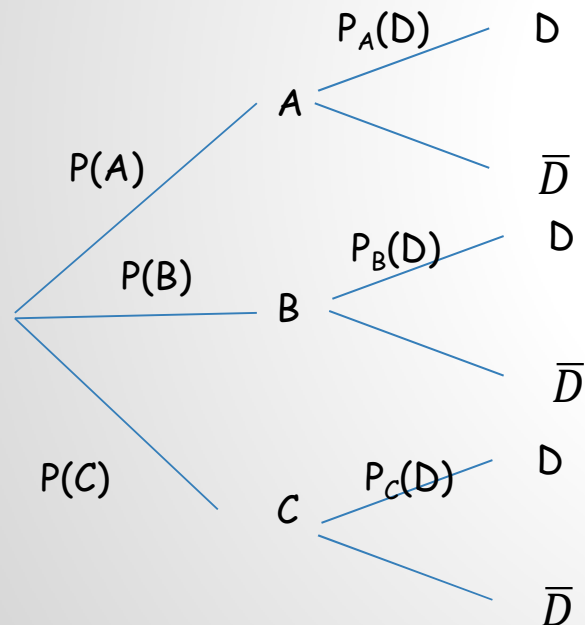
TES

Probabilités conditionnelles

Partition de l'univers

IV Calcul d'une probabilité à l'aide d'une partition

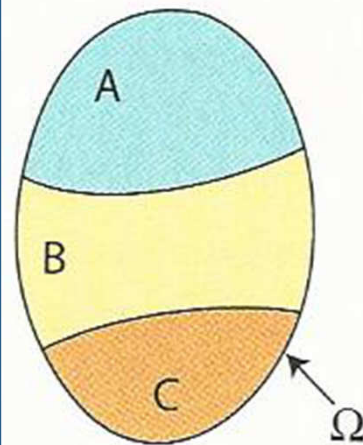
Lorsqu'une expérience aléatoire peut être représentée par l'arbre pondéré ci-dessous :



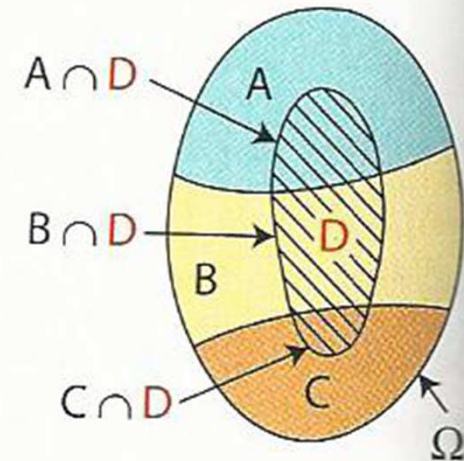
Alors les évènements A , B et C forment **une partition** de l'univers Ω .

Cela signifie que :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \emptyset, \\ A \cap C &= \emptyset, \\ B \cap C &= \emptyset, \\ A \cup B \cup C &= \Omega \end{aligned}$$



Cette partition induit une partition des évènements D et \bar{D} .



Ainsi $D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$

Les évènements $A \cap D$ et $B \cap D$ et $C \cap D$ étant deux à deux incompatibles, on a donc :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D).$$

En introduisant les probabilités conditionnelles, on obtient alors :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D).$$

On peut ainsi calculer la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Traduction sur l'arbre pondéré :

Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement D est la somme des probabilités qui conduisent à D.

V Un exemple de partition de l'univers

On reprend l'exemple du paragraphe II.

La probabilité pour qu'un élève n'ait pas redoublé est :

$$P(\bar{D}) = P(T \cap \bar{D}) + P(\bar{T} \cap \bar{D})$$

$$\text{Soit } P(\bar{D}) = 0,8 \times 0,95 + 0,2 \times 0,02 = 0,764$$

On peut alors calculer :

$$\bullet P_{\bar{D}}(\bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,2 \times 0,02}{0,764} \approx 0,005$$

$$\bullet P_D(T) = \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = \frac{0,8 \times 0,05}{1 - 0,764} \approx 0,169$$

On peut alors « retourner » l'arbre initial en utilisant D et \bar{D} comme partition de Ω .

