

I Variable aléatoire

Notion de variable aléatoire

Définition :

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
On définit une **variable aléatoire** X sur E quand on associe un nombre réel à chaque issue de E . On dit que l'ensemble de ces réels est l'ensemble des valeurs prises par X .

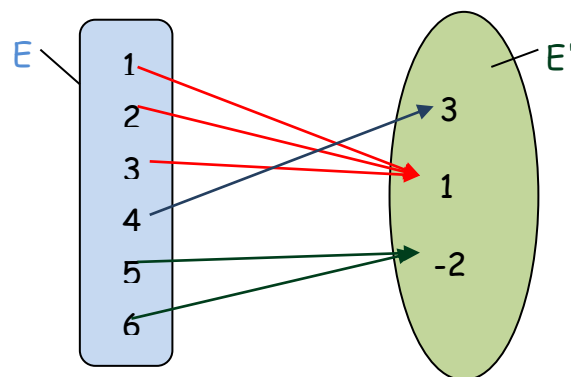
Exemple :

Soit l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré. L'ensemble des issues peut être modélisé par $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

On considère la règle de jeu suivante : on gagne 1 € si la face du dé qui sort est 1, 2 ou 3, on gagne 3 € si c'est la face 4 et on perd 2 € si c'est la face 5 ou 6.

Cette règle définit une variable aléatoire X sur E .

L'ensemble des valeurs prises par X est $E' = \{-2 ; 1 ; 3\}$.



Événements liés à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers E .

L'ensemble des valeurs prises par X est : $E' = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_r\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de E .

Définitions :

- L'événement « $X = x_i$ » est l'ensemble des issues de E auxquelles on associe le réel x_i .
- L'événement « $X \geq x_i$ » est l'ensemble des issues de E auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x_i .

Exemple :

Dans l'exemple du dé ci-dessus, l'événement « $X = -2$ » est formé des issues 5 et 6 : c'est l'événement $\{5 ; 6\}$ contenu dans E .

L'événement « $X > 0$ » est formé des issues 1, 2, 3 et 4 : c'est donc l'événement $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition :

La probabilité de l'événement « $X = x_i$ » est la probabilité de l'événement formé de toutes les issues associées au nombre x_i .

Exemple :

Dans l'exemple du dé ci-dessus, le nombre 1 est associé aux issues 1, 2 et 3.

Par équiprobabilité dans E , $P(X = 1) = P(\{1 ; 2 ; 3\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers fini E et E' l'ensemble des valeurs prises par X . La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$, où x_i prend toutes les valeurs de E' .

Exemple :

Dans l'exemple du dé ci-dessus, on obtient le tableau suivant :

x_i	-2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Somme des probabilités $p_i = P(X = x_i)$

Propriété 1 :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_r) = 1 \text{ ou } p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$$

Cette propriété permet :

- de vérifier les résultats trouvés lors de la recherche d'une loi de probabilité ;
- de déterminer une des valeurs $P(X = x_i)$ à partir des autres sans avoir à calculer de probabilité.

II Espérance, variance et écart-type

Définitions :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_r$ avec les probabilités $p_1 ; p_2 ; \dots ; p_r$.

- On appelle **espérance** de X le nombre $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_r x_r = \sum_{i=1}^r p_i x_i$.

- On appelle **variance** de X le nombre :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_r(x_r - E(X))^2 = \sum_{i=1}^r p_i(x_i - E(X))^2.$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation :

L'espérance d'une variable aléatoire X s'interprète comme la **valeur moyenne des valeurs prises par X** lorsque l'expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois.

Remarques :

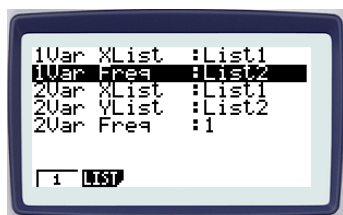
- Dans un jeu de hasard, l'espérance est liée à l'espoir de gain du joueur.
Un jeu est équitable si l'espérance du gain du joueur est nulle.
- La formule donnant $E(X)$ est semblable à celle de la moyenne d'une série statistique obtenue à partir des fréquences.

Avec la calculatrice :

Pour calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire, on procède comme pour calculer la moyenne d'une série statistique pondérée par les effectifs.

Casio

Dans le menu **CALC**, on choisit **SET**, puis on sélectionne les deux listes, et on obtient le résultat avec le menu **1 VAR**.



Texas

Touche **STAT**

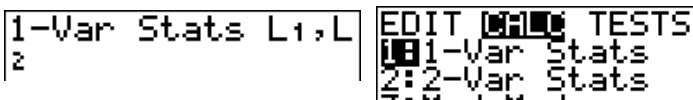
Menu **Edit**

On saisit la série de données de (x_i) dans L1.

On saisit la série de données de (p_i) dans L2.

Menu **Calc**

On choisit 1 : **1-Var Stats**



L'espérance est \bar{x} et l'écart-type est σ_x .

Avec un tableur :

On entre dans une plage de cellules P les valeurs x_i et dans une autre plage P' les valeurs p_i .

On obtient l'espérance par la formule : **=SOMMEPROD(P,P')**.

Propriété 2 : (théorème de König-Huygens)

[Démonstration](#)

$$V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

III Transformation affine d'une variable aléatoire

Définition :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_r$.

Pour tous réels a et b, on peut définir une autre variable aléatoire, en associant à chaque issue donnant la valeur x_i , le nombre $ax_i + b$.

On note cette variable aléatoire $aX + b$.

Propriété 3 :

[Démonstration](#)

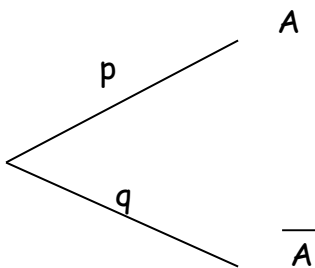
$$E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } V(aX + b) = a^2 V(X)$$

III Répétitions d'expériences identiques et et indépendantes

Modélisation d'expériences identiques et indépendantes

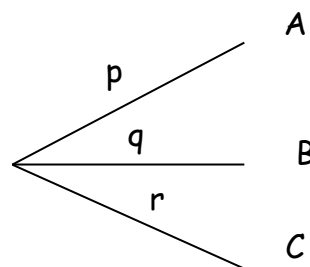
On peut modéliser une expérience aléatoire à deux ou trois issues (ou plus) à l'aide d'un arbre pondéré.

La probabilité de chaque issue est inscrite sur la branche conduisant à une issue.



Expérience à deux issues A et \overline{A} .

$$p + q = 1$$



Expérience à trois issues A, B et C :

$$p + q + r = 1$$

Expériences indépendantes

Définition

Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

Exemple : Lancer deux fois de suite une pièce de monnaie constitue la répétition de deux épreuves identiques (lancer une pièce) et indépendantes, car le résultat du second lancer ne dépend pas du résultat du premier lancer.

Modélisation de la répétition de deux expériences identiques et indépendantes

Propriété

Dans un **arbre pondéré** représentant la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le **produit** des probabilités de chaque résultat.

Exemple : lancer deux fois de suite une pièce.

On note A l'issue « obtenir PILE » et \overline{A} l'issue « obtenir FACE ».

On a ici $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$.

AA correspond à l'événement « obtenir deux fois PILE ».

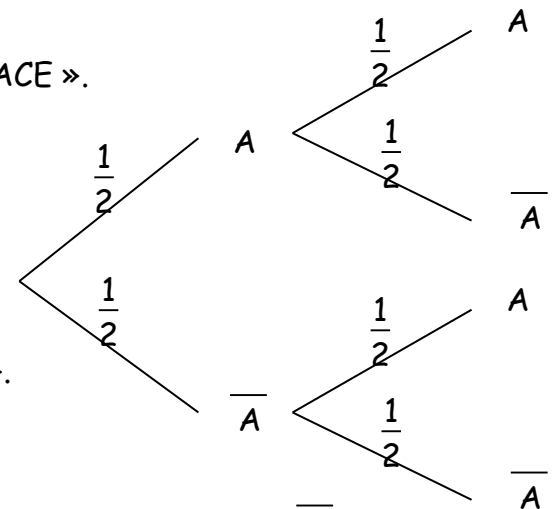
$$P(AA) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\overline{A}\overline{A}$ correspond à l'événement « obtenir deux fois FACE ».

$$P(\overline{A}\overline{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

L'événement « obtenir une fois PILE et une fois FACE » est formé des issues $A\overline{A}$ et $\overline{A}A$.

Sa probabilité est : $P(A\overline{A}) + P(\overline{A}A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.



Démonstrations

Propriété 2 : (théorème de König-Huygens)

$$V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^r p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^r p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^r p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^r p_i (E(X))^2 = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^r p_i x_i + (E(X))^2 \sum_{i=1}^r p_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - 2 \times E(X) \times E(X) + (E(X))^2 = \sum_{i=1}^r p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Propriété 3 :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \text{ et } V(aX) = a^2 V(X)$$

$$E(aX + b) = p_1(ax_1 + b) + p_2(ax_2 + b) + \dots + p_r(ax_r + b)$$

$$E(aX + b) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_r x_r) + b(p_1 + p_2 + \dots + p_r)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b \times 1 = aE(X) + b$$

D'après le théorème de Koenig-Huygens :

$$V(aX) = E((aX)^2) - [E(aX)]^2$$

$$\text{Or } E(aX) = aE(X).$$

$$\text{Donc } V(aX) = p_1 (ax_1)^2 + p_2 (ax_2)^2 + \dots + p_r (ax_r)^2 - [aE(X)]^2$$

$$V(aX) = a^2 (p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \dots + p_r x_r^2) - a^2 [E(X)]^2$$

$$V(aX) = a^2 E(X^2) - a^2 [E(X)]^2$$

$$V(aX) = a^2 [E(X^2) - [E(X)]^2]$$

$$V(aX) = a^2 V(X) \quad (\text{encore en utilisant le théorème de Koenig-Huygens}).$$