1. Fonctions polynômes de degré 2

a) Forme canonique

Proposition :
a, b, c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

Cette forme est appelée **forme canonique du trinôme.**

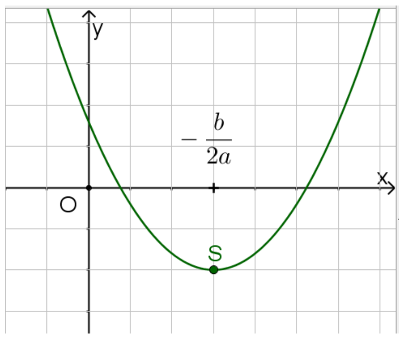
Définition :
On appelle **discriminant du trinôme** le nombre Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

b) Représentation graphique et sens de variation

Théorème
Le sens de variation de la fonction polynôme f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend du signe de a. Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de f est une **parabole** d'axe de symétrie vertical ayant pour sommet le point $S\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. On a alors :

- Si $a > 0$

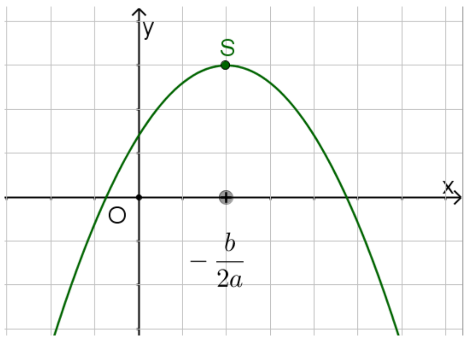
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗



f admet un **minimum réalisé en** $x = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘



f admet un **maximum réalisé en** $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Racines et signes

Théorème

Notons (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et f la fonction associée ; alors :

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux racines **disctinctes**

$\mathbf{x_1} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\mathbf{x_2} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		Signe de a	0	Signe de – a	0	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$, (E) admet une racine (**double**)

$\mathbf{x_0} = -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f(x)		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta < 0$, (E) n'admet **aucune** racine réelle. Pas de factorisation possible sur $\mathbb{R}$.

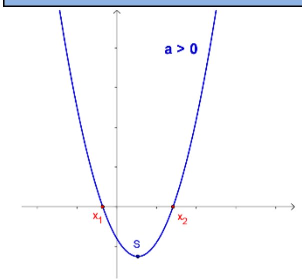
x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)		Signe de a	

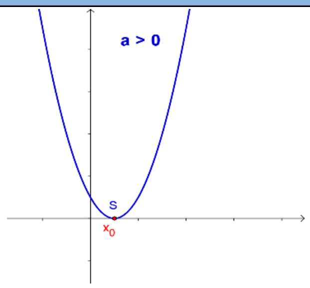
d) Résumé graphique

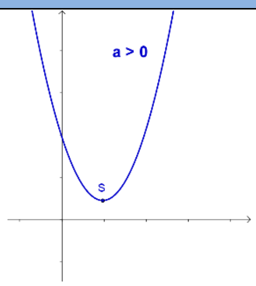
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ de discriminant Δ.

Six exemples de paraboles selon les signes de Δ et de a.

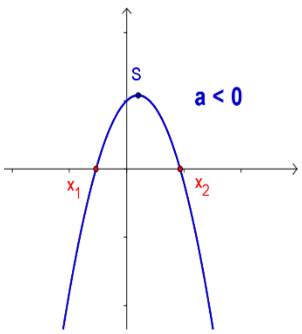
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

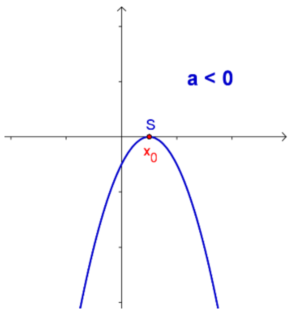


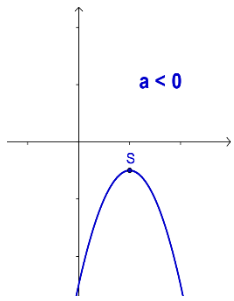




$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$







Formes de f(x) $\Delta > 0$	Formes de f(x) $\Delta = 0$	Formes de f(x) $\Delta < 0$
développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$	développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$	développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$
canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$	canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$	canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	factorisée : $f(x) = a(x - x_0)^2$	pas de forme factorisée