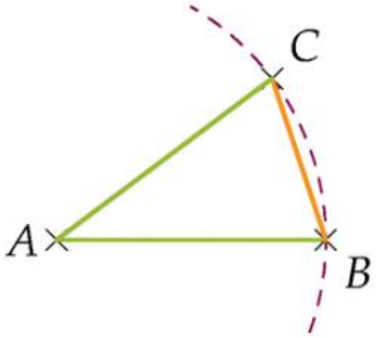
Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 1$.



Le but de l'exercice est de déterminer l'aire maximale de ABC ainsi que la longueur BC rendant cette aire maximale.

1) On choisit BC comme variable et on pose $x = BC$.

a) À quel intervalle appartient x ?

b) Démontrer que la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto \mathcal{A}_{ABC}$ a pour expression :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\sqrt{-x^4 + 4x^2}}{4}.$$

c) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier :

$$x \mapsto -x^4 + 4x^2.$$

d) Déterminer les variations de cette fonction sur son ensemble de définition et répondre au problème posé. Quelle est alors la nature de ABC ?

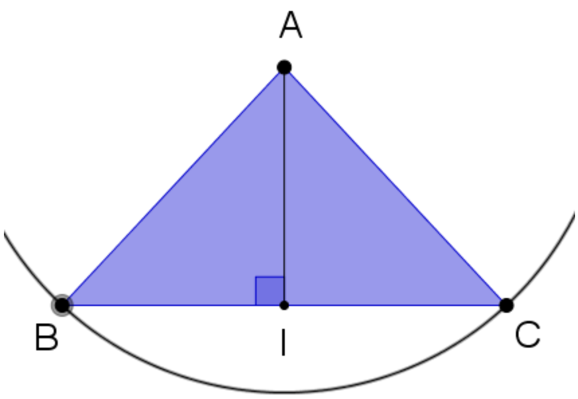
2) Point de vue géométrique

On note H le pied de la hauteur issue de C. Exprimer $\mathcal{A}_{ABC}$ en fonction de CH et retrouver le résultat précédent.

Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

1) a) La valeur minimale de x est lorsque B = C, soit x = 0.
La valeur maximale de x est lorsque A est le milieu de [BC]; soit $x = 2\times AB = 2$
Donc $x \in [0;2]$.

b)



$\text{Aire}(ABC) = \dfrac{BC\times AI}{2} = \dfrac{x}{2}\times AI$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en I pour calculer AI :

$AB^2 = AI^2 + BI^2$

Soit $1^2 = AI^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ car $BI = \dfrac{BC}{2}$

D'où : $AI^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{4 - x^2}{4}$

Donc $\text{Aire}(ABC) = \dfrac{x}{2}\times\sqrt{\dfrac{4 - x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{x^2}\times\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{x^2(4 - x^2)}$

Soit $\mathcal{A}(x) = \dfrac{1}{4}\times\sqrt{-x^4 + 4x^2}$

c) On introduit la fonction f définie par $f(x) = -x^4 + 4x^2$.

On remarque que $f(x) = x^2(4 - x^2) = x^2(2 + x)(2 - x)$

Pour $x \in [0;2]$, $f(x) \geq 0$

Pour $x \in [0;2]$, comme les fonctions 4f et $\dfrac{1}{4}\sqrt{f}$ ont les mêmes variations, les fonctions $\mathcal{A}$ et f ont les mêmes variations.

d) En tant que fonction polynôme f est dérivable sur [0;2].

$f'(x) = -4x^3 + 8x = 4x(-x^2 + 2) = 4x(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$

Comme $x \geq 0$, alors f(x) est du signe de $\sqrt{2} - x$.

Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

On en déduit le tableau des variations de f suivant :

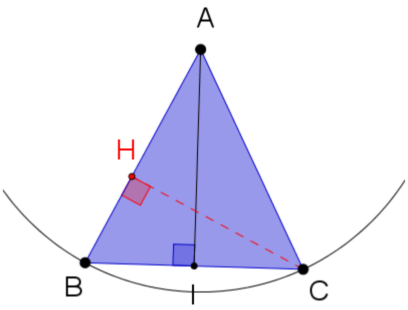
x	0		$\sqrt{2}$		2
f'		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}^4 + 4\times\sqrt{2}^2 = -4 + 4\times 2 = 4$

$\mathcal{A}(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}\times\sqrt{f(\sqrt{2})} = \frac{1}{4}\times\sqrt{4} = \frac{1}{2}$

L'aire du triangle ABC est maximale pour $x = \sqrt{2}$ et l'aire maximale est égale à $\frac{1}{2}$.

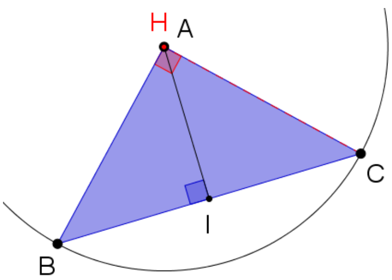
2)



$\text{Aire}(ABC) = \frac{AB\times CH}{2} = \frac{CH}{2}$

L'aire de ABC est maximale lorsque CH est maximal.

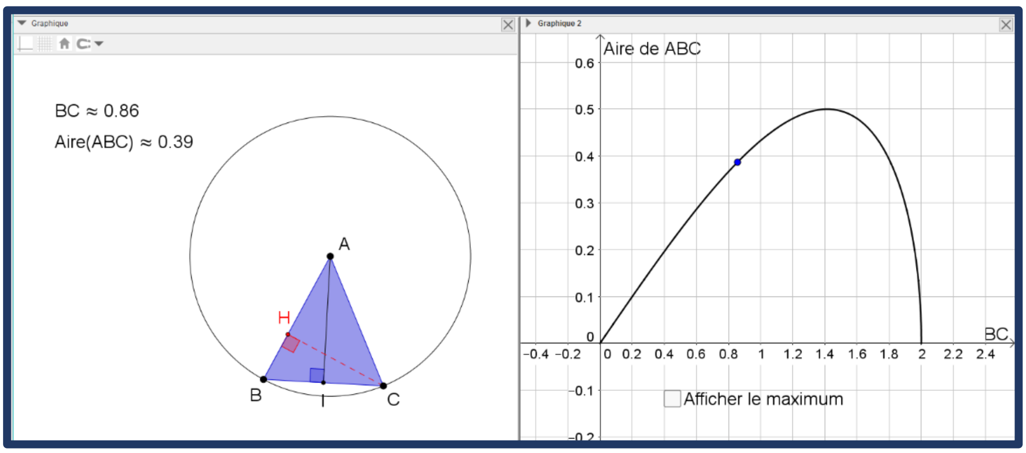
CH est maximal lorsque les points A et H sont confondus.



Le triangle ABC est alors rectangle isocèle en A.

Son aire est alors $\frac{AB\times AC}{2} = \frac{1}{2}$ et la longueur BC est égale à $\sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}$.

On retrouve ainsi géométriquement les résultats de l'étude analytique de la question 1) d).



Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

Dans chaque cas suivant, déterminer l'ensemble de définition puis les variations de la fonction f définie par :

1) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$

2) $f(x) = \dfrac{10\sqrt{x}}{x+1}$

3) f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{2x^2}$.

Indication :

```
(%i1) x^3-1, factor;
(%o1) (x-1)(x^2+x+1)
```

f est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

En tant que quotient de deux fonctions polynômes, f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = (x+1)^2$ et $v(x) = x^3$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$$

Or $u'(x) = 2 \times 1 \times (x+1) = 2(x+1)$ et $v'(x) = 3x^2$

Donc $f'(x) = \dfrac{2(x+1)x^3 - (x+1)^2 \times 3x^2}{x^6} = \dfrac{(x+1)x^2(2x - 3(x+1))}{x^6} = \dfrac{(x+1)(-x-3)}{x^4}$

Etudier les variations de f revient à déterminer le signe de sa dérivée.

$f'(x)$ est du signe de $(x+1)(-x-3)$ car $x^4 > 0$.

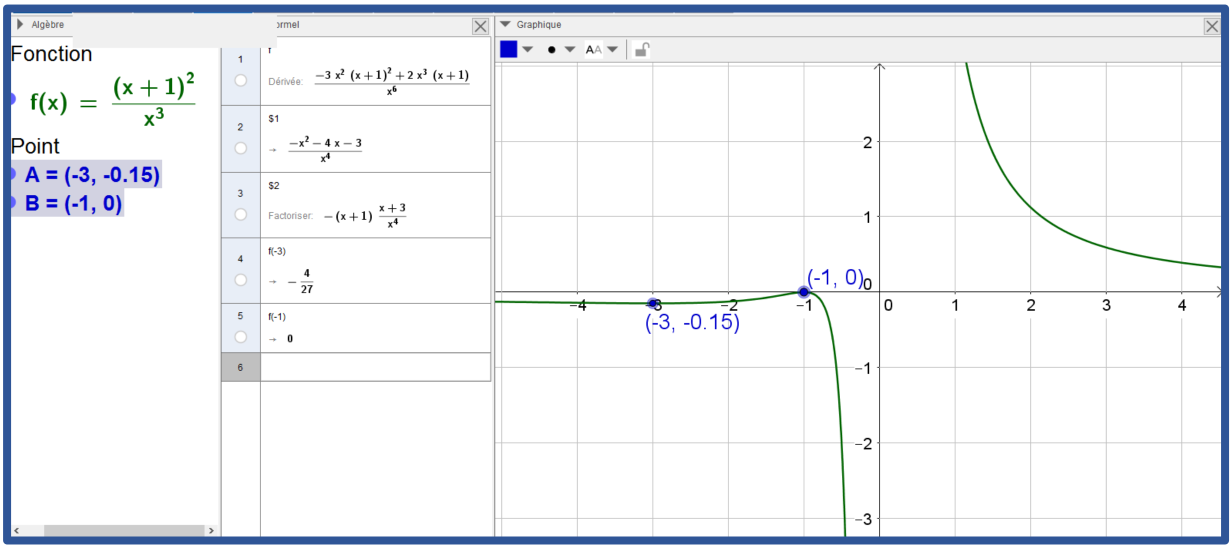
<u>**Tableau des variations de f**</u> :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f'		-		+		-	
f(x)		$\searrow$	$-4/27$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$f(-3) = \dfrac{(-3+1)^2}{(-3)^3} = -\dfrac{4}{27}$ et $f(-1) = 0$

Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

Vérification avec GeoGebra :



1) f est définie sur $\mathbb{R}+ = [0;+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto 10\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

La fonction affine $x \longmapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc f est dérivable sur ‹

Pour $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 10\sqrt{x}$ et $v(x) = x + 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$$

Or $u'(x) = \frac{10}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 1$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{\frac{5}{\sqrt{x}}\times(x+1) - 10\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}\times\left(\frac{\sqrt{x}}{x}(x+1) - 2\sqrt{x}\right)$$

$$\text{Soit } f'(x) = \frac{5\sqrt{x}}{(x+1)^2}\times\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2x}{x}\right) = \frac{5\sqrt{x}}{(x+1)^2}\times\frac{1-x}{x}$$

Comme $\frac{5\sqrt{x}}{(x+1)^2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\frac{1-x}{x}$

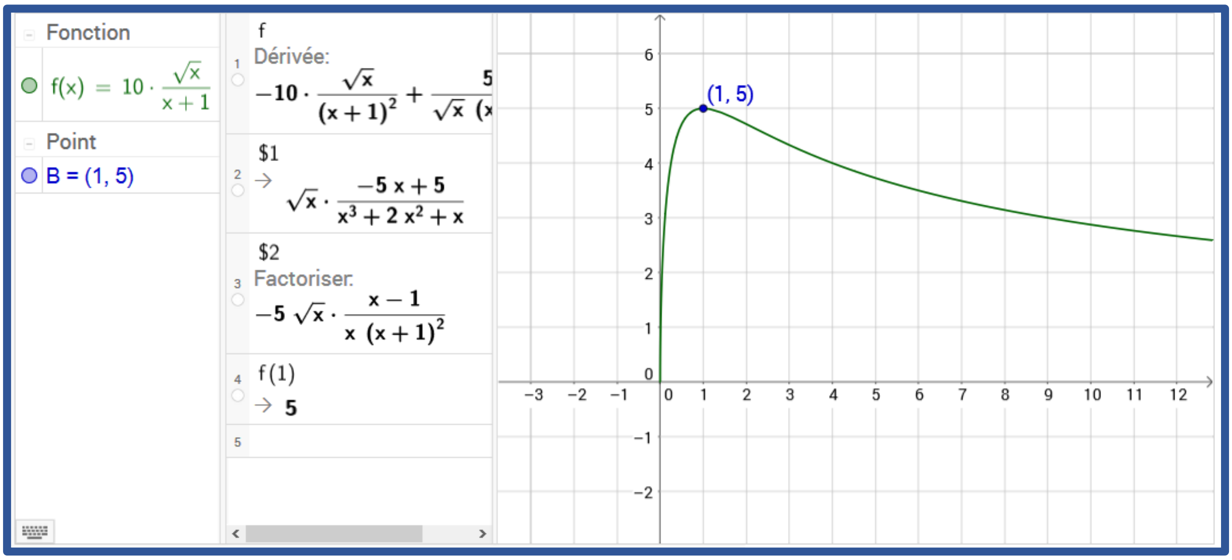
Et comme $x > 0$, alors $\frac{1-x}{x}$ est du signe de $1 - x$

Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

Tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	5	↘	

Vérification avec GeoGebra :



2) $f(x) = x + \dfrac{1}{2x^2}$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{-2x}{x^4} = 1 - \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1}{x^3} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times1 = -3$.

Comme $a = 1 > 0$ et $\Delta < 0$, alors $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x réel.

Donc $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{x-1}{x}$.

Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$		↗	‖	↘	$3/2$	↗	

Exercices préparation évaluation applications de la dérivation

Vérification avec GeoGebra :