

Première S Notations et raisonnements mathématiques

I Les implications dans le raisonnement mathématique

L'implication - l'équivalence

Exercice 1 : de la logique en français

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris.

Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. A l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche. Est-il cosmonaute américain ?
2. A côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge. Est-il cosmonaute américain ?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

Exercice 2 : Expression algébrique, implications et équivalence

1. Résoudre l'équation : $(x - 3)^2 = (x + 9)^2$
2. Voici quelques propositions, où A et B sont des nombres réels :

$(P_1) : A^2 = B^2$	$(P_2) : A = B$	$(P_3) : A = -B$
$(P_4) : (A + B)(A - B) = 0$	$(P_5) : A = B \text{ ou } A = -B$	$(P_6) : A = 0 \text{ ou } B = 0$

 - a) Quelles implications du type $(P_i) \Rightarrow \dots$ sont vraies pour tous réels A et B ?
 - b) Parmi les propositions (P_2) , (P_3) , (P_4) , (P_5) et (P_6) , identifier celles qui impliquent la proposition (P_1) pour tous réels A et B.
 - c) Quelles sont les propositions équivalentes (pour tous réels A et B) ?

Exercice 3

Trouver le lien entre les propositions du tableau. L'indiquer par un symbole d'implication ou d'équivalence dans la colonne du milieu.

x est un multiple de 5.		Le chiffre des unités est 5.
$x = 2$		$x^2 = 4$
$\frac{1}{x} > 0$		$x > 0$
$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$		$x > 2$
ABC est rectangle en A		$BC^2 = AB^2 + AC^2$
C'est le 1 ^{er} janvier		Le lycée est fermé
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$		ABDC est un parallélogramme.
$AB = CD$		$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
$AB \neq CD$		$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$
Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$		A, B, C et D sont alignés
$a = \sqrt{b}$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$		$a^2 = b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Première S Notations et raisonnements mathématiques

Exercice 4 : Géométrie vectorielle

Dans chaque cas, dire si l'implication " H implique H' " est vraie puis si l'implication " H' implique H " est vraie puis donner les propositions équivalentes.

- a) H : « C est l'image du point A par la translation de vecteur \overrightarrow{BD} ».
H' : « ABDC est un parallélogramme ».
- b) H : « ABDC est un parallélogramme de centre O ».
H' : « O est le milieu de [AC]. ».
- c) H : « $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ »
H' : E(0 ;2) et F(3 ;6) »
- d) H : « Les points I, J et K sont alignés »
H' : « $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IK}$ »

Enigme logique 1

Un sociologue avait eu vent d'une étrange société formée de deux groupes rigoureusement opposés : une partie des habitants ne faisaient que mentir (menteurs) et les autres ne savaient dire que la vérité (véridiques).

Il rencontre dans cette société deux personnes, ne sachant pas à quel camp elles appartiennent. Il s'approche et demande au plus aimable des deux :

- Faites-vous partie de ceux qui disent toujours la vérité ?
- Shrook ! répondit l'individu, à la déception du sociologue, qui se sentit berné.

Que pouvait signifier Shrook ? pensa le chercheur. Il s'apprêtait à interroger l'autre individu quand celui-ci lui dit :

- Il a dit "oui". Mais c'est un fieffé menteur !

Ces deux individus étaient-ils l'un et l'autre des menteurs ? Ou des véridiques ? Ou bien l'un, un menteur, et l'autre un véridique ?

Exercice 5 : les trinômes

On considère un trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, Δ son discriminant et \mathcal{P} la courbe représentant la fonction f .

Dire si les implications sont vraies. Qu'en est-il de leur réciproque ?

- 1) Si pour tout réel x, $ax^2 + bx + c \leq 0$; alors $\Delta < 0$.
- 2) Si a et c sont de signes opposés, le trinôme a des racines.
- 3) Si f a des racines alors $b = 0$.
- 4) Si le sommet de \mathcal{P} est sur l'axe des ordonnées, alors $b = 0$.
- 5) Si $c = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution.
- 6) f admet une racine double donc $f(x) \geq 0$ pour tout x réel.
- 7) f admet 2 et 3 comme racines donc sa forme factorisée est $(x - 2)(x - 3)$.
- 8) S'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) \times f(x_2) < 0$, alors $\Delta > 0$

Première S Notations et raisonnements mathématiques

Exercice 6 : les trinômes (bis)

On considère un trinôme défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Dire si les implications sont vraies.

Soit (P_1) la proposition « Si $ac < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes. »

- 1) La proposition (P_1) est-elle vraie ?
- 2) a) Énoncer la contraposée (P_2) de (P_1) .
b) La proposition (P_2) est-elle vraie ?
- 3) a) Énoncer la réciproque (P_3) de (P_1) .
b) (P_3) est-elle vraie ?

Enigme logique 2

Les habitants de Logicville sont divisés en 4 catégories :

- les Véridiques qui disent toujours la vérité,
- les menteurs qui mentent tout le temps,
- les Changeants qui tantôt mentent, tantôt disent la vérité,
- les Fous qui contrairement aux 3 autres catégories ne raisonnent pas en termes de logique et peuvent donc dire n'importe quoi, y compris des phrases contradictoires.

Une famille logicvilloise est systématiquement composée d'un Véridique, d'un menteur, d'un Changeant et d'un Fou.

Les logicvillois aiment jouer de la musique en famille, chaque membre ayant un instrument qui lui est propre.

Vous remarquerez que ces instruments sont singuliers : l'archer, le bilboquet, le ceinturon et la douchette.

Lors de ma rencontre avec la première logicvilloise, voici ce qu'ils affirmèrent :

- le Véridique : je n'ai pas l'archer
- le menteur : je n'ai pas le bilboquet
- le Changeant : je n'ai pas le ceinturon
- le Fou : je n'ai pas la douchette

J'ai appris plus tard que 2 seulement de ces affirmations étaient vraies.

De quel instrument joue le Fou ?