

## I L'implication

Considérons l'énoncé suivant :

« Si  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ , alors les angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{BCA}$  sont de même mesure. »

Cet énoncé affirme ceci : s'il est vrai que le triangle  $ABC$  est isocèle en  $A$ , alors il est vrai que les angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{BCA}$  sont de même mesure.

Autrement dit : lorsque la **proposition** (P) (c'est-à-dire l'affirmation (P)) : «  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  » est vraie, alors la proposition (Q) : « les angles  $\widehat{CBA}$  et  $\widehat{BCA}$  sont de même mesure est vraie aussi. On dit que (P) implique (Q) et on note  $(P) \Rightarrow (Q)$ .

Plus généralement, dire que la proposition (P) implique la proposition (Q) signifie que lorsque (P) est vraie alors (Q) est vraie, ou encore que (Q) est une conséquence de (P).

Exemples :

1. Si  $x = 2$  alors  $x^2 = 4$  ; donc  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ .
2. Si la fonction  $f$  est croissante sur  $[1 ; 2]$  alors  $f(1) \leq f(2)$  ; donc  $f$  croissante sur  $[1 ; 2] \Rightarrow f(1) \leq f(2)$ .
3. Si le triangle  $ABC$  est équilatéral alors  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$  ; donc  $\widehat{ABC}$  équilatéral  $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ .
4. « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés » : l'implication est ici cachée. Il faut lire : « Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. »

## II L'implication réciproque

Considérons les propositions (P) et (Q) suivantes :

- (P) :  $x = 2$
- (Q) :  $x^2 = 4$

Nous savons que (P) implique (Q) ( $(P) \Rightarrow (Q)$ ).

Nous pouvons nous poser le problème de savoir si la réciproque est vraie, c'est à dire si (Q) implique (P).

Cette réciproque s'énonce : si  $x^2 = 4$  alors  $x = 2$ .

Cette réciproque est évidemment fausse car puisque  $(-2)^2 = 4$  et  $-2 \neq 2$ .

Exercice :

Ecrire les réciproques des implications précédentes et préciser si elles sont vraies ou fausses.

## III L'équivalence

Lorsque  $(P) \Rightarrow (Q)$  et  $(Q) \Rightarrow (P)$ , l'implication et sa réciproque sont vraies, on dit alors que les deux propositions (P) et (Q) sont **équivalentes**. On dit : (P) 'équivalent' à (Q) ou encore : (P) **si et seulement si** (Q).

On note  $(P) \Leftrightarrow (Q)$  pour dire (P) si et seulement si (Q) ou encore (P) 'équivalent' à (Q).

Exemples :

- $ABC$  rectangle en  $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$  : le théorème de Pythagore et sa réciproque nous fournisse une équivalence.  
On dit que la propriété de Pythagore est une **propriété caractéristique** d'un triangle rectangle.
- $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$  ou  $x = 2$

## IV Montrer que c'est vrai, montrer que c'est faux

### Exemple 1 :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  et  $g(x) = (x - 1)^2$ .

Ces deux fonctions sont-elles égales ?

Cette question sous-entend : a-t-on  $f(x) = g(x)$  pour **tout réel  $x$**  ?

Pour prouver que ces deux fonctions ne sont pas égales, il suffit de trouver une valeur de  $x$  telle que  $f(x) \neq g(x)$ .

Par exemple, pour  $x = 1$ ,  $f(1) = 4$  et  $g(1) = 0$  ; donc  $f(1) \neq g(1)$  et donc les fonctions  $f$  et  $g$  ne sont pas égales.

### Exemple 2 :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (x - 1)(x + 3)$  et  $v(x) = x^2 + 2x - 3$

Ces deux fonctions sont-elles égales ?

Cette question sous-entend : a-t-on  $u(x) = v(x)$  **pour tout  $x$  réel** ?

Pour tout  $x$  réel, en développant  $u(x)$ , on obtient  $u(x) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3 = v(x)$ .

Donc les fonctions  $u$  et  $v$  sont bien égales.

### Conclusion :

- Pour prouver qu'un énoncé est faux, il suffit d'exhiber un cas pour lequel l'énoncé est faux : Il s'agit d'un **contre-exemple**.
- Pour prouver qu'un énoncé est vrai, il faut utiliser des propriétés (algébriques ou géométriques) et se placer dans le cas général de l'énoncé.

### Exercices :

Les phrases suivantes sont fausses. Le prouver en trouvant un contre-exemple.

- 1) Pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x}$  est un nombre irrationnel.
- 2) Pour tout réel  $x$ ,  $\sqrt{x^2} = x$
- 3) L'inverse d'un nombre non nul est inférieur ou égal à 1.
- 4) Si la fonction  $f$  est telle que  $f(1) > f(2)$  alors  $f$  est décroissante sur  $[1 ; 2]$ .