Première S 2010-2011

Exercices préparation composition troisième trimestre

Exercice 1

Les courbes seront tracées dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

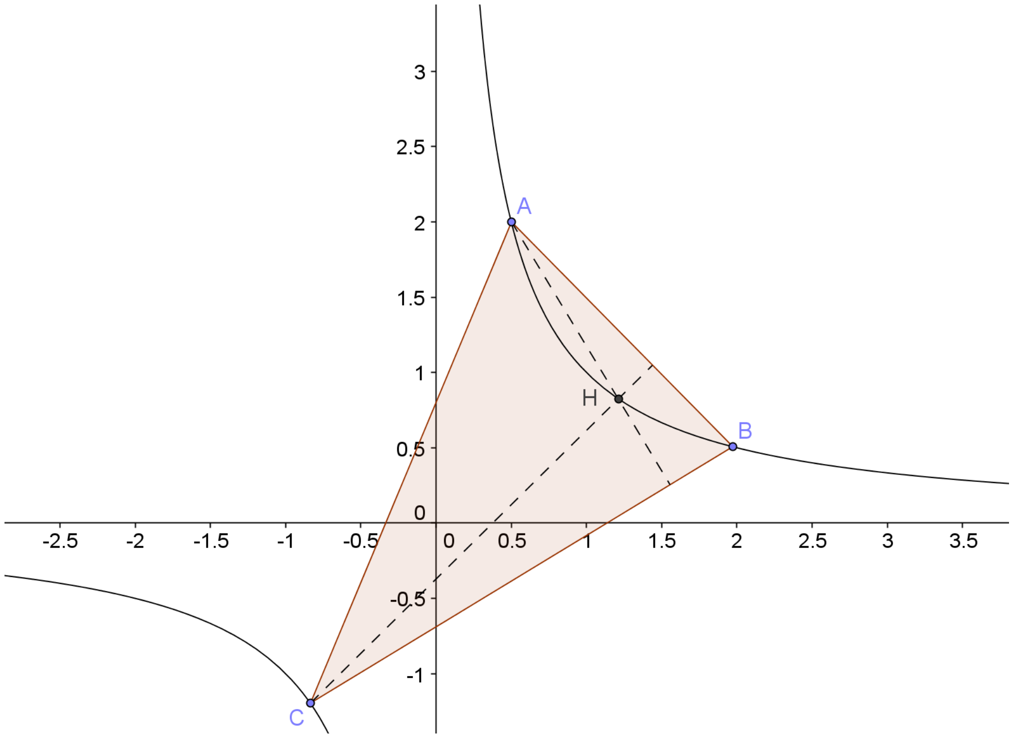
1) Tracer la courbe $\mathcal{P}$ représentative de la fonction g définie sur P par $g(x) = x^2 - x$.
2) On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$.
   Calculer P(1) et déterminer un trinôme R(x) = tel que, pour tout réel x, on ait :
   $$P(x) = (x - 1)R(x).$$
3) On considère la fonction définie sur P \ {-1}, par :
   $$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1},$$
   et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
   a) Montrer que, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x+1)^2}$.
      En déduire les variations de f.
   b) Déterminer les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et en -1.
   c) Dresser le tableau des variations de f.
4) a) Montrer que pour tout x différent de -1, on peut écrire :
   $$f(x) = g(x) + \frac{a}{x+1},$$
   où a est un réel à déterminer.
   b) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ d $f(x) - g(x)$.
   c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$.
   d) Tracer $\mathcal{C}$ dans le même repère que $\mathcal{P}$.

Exercice 2 : orthocentre de trois points d'une hyperbole.

On va démontrer que "Etant donné trois points distincts d'une hyperbole, l'orthocentre du triangle formé par ces trois points appartient aussi à l'hyperbole".

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$, on considère trois points distincts A, B et C de l'hyperbole Γ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Exercices préparation composition troisième trimestre



On note a, b et c les abscisses des points A, B et C.
Soit $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ les hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC.

1) Montrer que $\overrightarrow{N_A}\begin{pmatrix} bc \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à la droite $\mathcal{D}_A$, puis déterminer une équation de $\mathcal{D}_A$.

2) Déterminer de même une équation de la hauteur $\mathcal{D}_B$.

3) Calculer alors les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC et vérifier qu'il appartient à Γ.

<u>**Exercice 3**</u> : Famille de cercles passant par deux points
On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan dont on donne les équations.

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0$

1) Déterminer le centre et le rayon de chacun de ces cercles.
2) Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ sont tangents à l'axe des abscisses.
3) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points A et B.

Exercices préparation composition troisième trimestre

4) On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des cercles passant par A et B.

   a) Si $\Omega(a;b)$ est centre de l'un des ces cercles, montrer que l'on a la relation $a + 2b - 8 = 0$.

   b) Ecrire une équation d'un cercle de $\mathscr{E}$ en fonction de a.

   c) Comment faut-il choisir le réel a pour que le cercle de $\mathscr{E}$ correspondant coupe l'axe des abscisses ?

Exercice 4 : Appliquer une formule de duplication

a) Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

b) En déduire que :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} = 0.$$

c) A l'aide de la feuille de calcul formel ci-dessous, déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

1 resoudre(8*x^4-8*x^2+1/2=0,x)

$$\left[-\sqrt{\frac{8+4\cdot\sqrt{3}}{16}} \quad -\sqrt{\frac{8-4\cdot\sqrt{3}}{16}} \quad \sqrt{\frac{8-4\cdot\sqrt{3}}{16}} \quad \sqrt{\frac{8+4\cdot\sqrt{3}}{16}} \right]$$

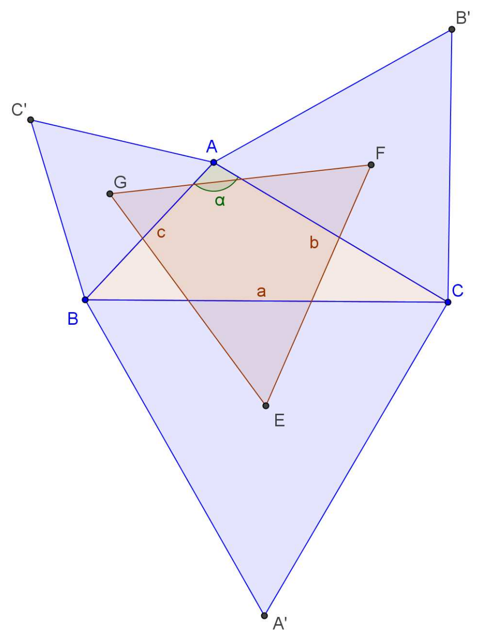
2 approx(resoudre(8*x^4-8*x^2+1/2=0,x))

[-0.965925826289 -0.258819045103 0.258819045103 0.965925826289]

3

Exercice 5 : Théorème de Napoléon

ABC est le triangle représenté ci-dessous.



On construit à l'extérieur de ce triangle, les triangles équilatéraux BA'C, CB'A et AC'B. On note E, F et G les centres de gravité respectifs de ces triangles.

a) En utilisant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AFG, démontrer que :

$$FG^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - 2\times b\times c\times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

b) En déduire que :

$$FG^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bc\times\cos\alpha) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times S$$

où S représente l'aire du triangle ABC.

c) Démontrer alors que $FG^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}S$.

(On pourra encore utiliser le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC.)

d) En déduire que le triangle EFG est équilatéral.

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

Exercice 1

Les courbes seront tracées dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

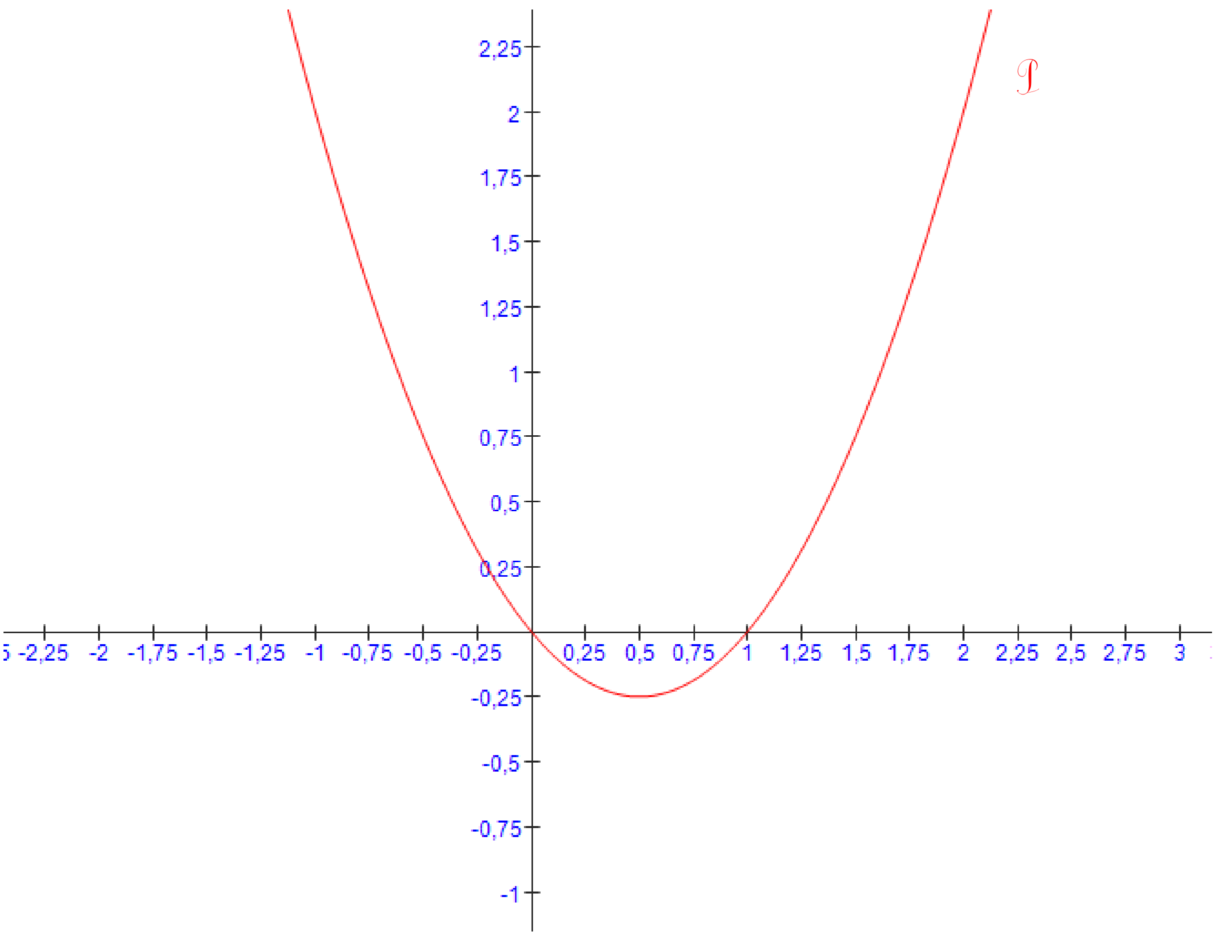
1) Tracer la courbe ℐ représentative de la fonction g définie sur P par $g(x) = x^2 - x$.

1) ℐ est une parabole.

$g'(x) = 2x - 1$

Variations de g :

x	$-\infty$		0.5		$+\infty$
f'		+		-	
f(x)	$+\infty$	↗	-0.25	↘	$+\infty$



2) $P(1) = 2 + 3 - 5 = 0$

Soit $R(x) = (ax^2 + bx + c)$

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

$(x - 1)R(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

$(x - 1)R(x) = P(x)$ ➔ $a = 2$ et $b - a = 3$ et $c - b = 0$ et $-c = -5$

➔ $a = 2$ et $b = 5$ et $c = 5$

Donc $R(x) = 2x^2 + 5x + 5$.

3) a) $f'(x) = \dfrac{(3x^2 - 1)(x + 1) - (x^3 - x + 4)}{(x + 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 5}{(x + 1)^2} = \dfrac{P(x)}{(x + 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x - 1)(2x^2 + 5x + 5)}{(x + 1)^2}$

$f'(x)$ est du signe de $(x - 1)(2x^2 + 5x + 5)$

Le discriminant associé au polynôme du second degré $2x^2 + 5x + 5 = 0$ est $\Delta = 5^2 - 4\times2\times5 = 25 - 40 = -15 < 0$

Donc $2x^2 + 5x + 5 > 0$ pour tout x.

Donc f est décroissante sur $]-\infty;-1[$, décroissante sur $]-1;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1,\, x<-1} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-1} x^3 - x + 4 = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-1,\, x<-1} (x + 1) = 0$ par V.N.

$\lim\limits_{x\to-1,\, x<-1} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-1} x^3 - x + 4 = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to-1,\, x>-1} (x + 1) = 0$ par V.P.

c) Tableau des variations de f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		-	‖	-		+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4) a) $g(x) + \dfrac{a}{x + 1} = x^2 - x + \dfrac{a}{x + 1} = \dfrac{x(x^2 - 1) + a}{x + 1} = \dfrac{x^3 - x + a}{x + 1}$

$g(x) + \dfrac{a}{x + 1} = f(x)$ ➔ $a = 4$

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

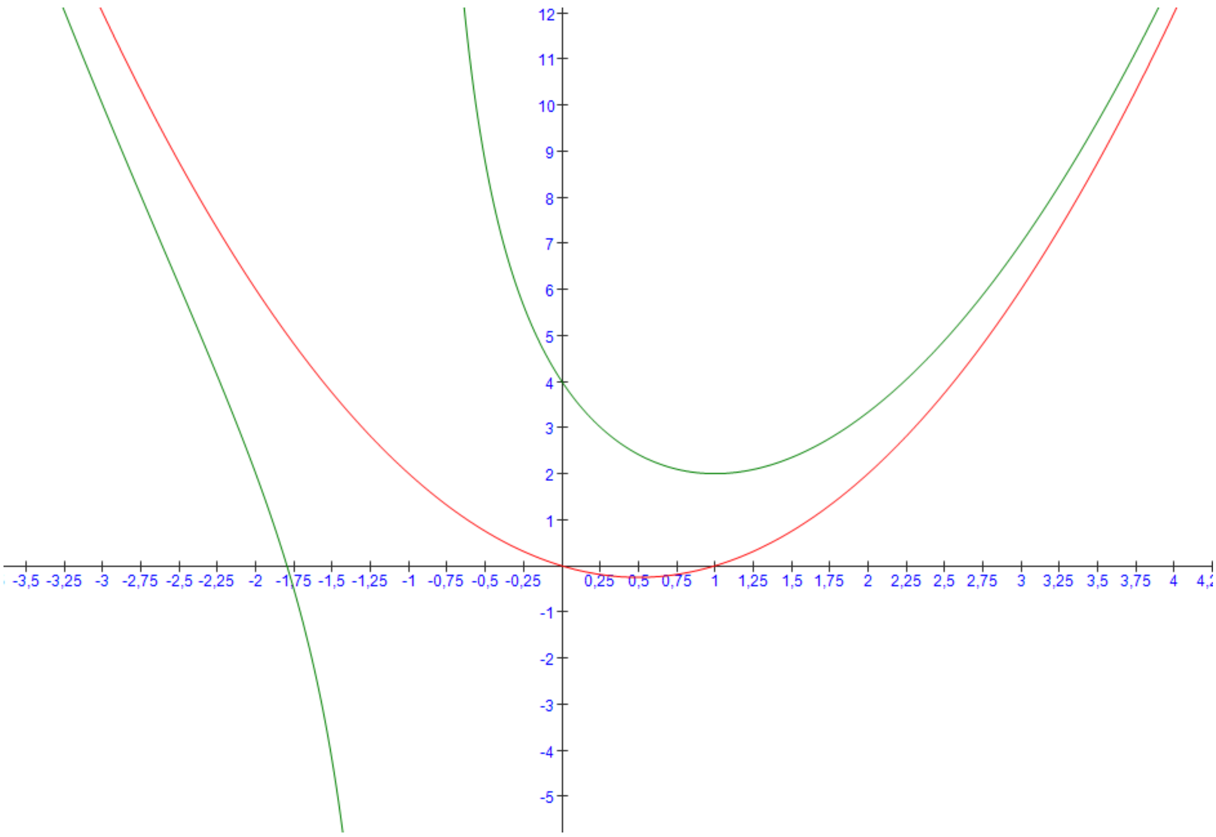
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0.$

c) $f(x) - g(x) = \dfrac{4}{x+1}.$

Donc si $x < -1$, $f(x) < g(x)$ et $\mathscr{C}$ est sous $\mathscr{P}$.

et si $x > -1$, $f(x) > g(x)$ et $\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{P}$.

d)



Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

Exercice 2 : orthocentre de trois points d'une hyperbole.

On a $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$; $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ et $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$

(a, b et c sont non nuls puisque A, B et C sont des points de l'hyperbole.)

1) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} c - b \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = (c - b)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{bc} \end{pmatrix} = \frac{c - b}{bc}\begin{pmatrix} bc \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{c - b}{bc}\overrightarrow{N_A}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{N_A}$ sont colinéaires.

Or comme $\mathcal{D}_A$ et (BC) sont perpendiculaires alors $\overrightarrow{N_A}$ est bien normal à la droite $\mathcal{D}_A$.

Une équation de la droite $\mathcal{D}_A$ est alors de la forme :

$bcx - y + \alpha = 0$

$A\left(a; \frac{1}{a}\right) \in \mathcal{D}_A$ donc $bca - \frac{1}{a} + \alpha = 0$

Donc $\alpha = \frac{1}{a} - bca$

Une équation de $\mathcal{D}_A$ est donc $bcx - y + \frac{1}{a} - bca = 0$

2) De même (pour des raisons de symétrie), une équation de $\mathcal{D}_B$ est :

$$acx - y + \frac{1}{b} - bca = 0$$

3) On résout le système :

$$\begin{cases} bcx - y + \frac{1}{a} - bca = 0 \\ acx - y + \frac{1}{b} - bca = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (bc - ac)x + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0 \\ y = bcx + \frac{1}{a} - bca \end{cases}$$

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \times \frac{1}{c(a-b)} = -\frac{1}{abc} \\ y = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - bca = -abc \end{cases}$$

Les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC sont donc :

$H\left(-\frac{1}{abc};-abc\right)$

On vérifie que $y_H = \frac{1}{x_H}$.

Donc H appartient à l'hyperbole Γ.

Exercice 3 : Famille de cercles passant par deux points

1) $\mathscr{C} : (x + 2)^2 - 4 + (y - 5)^2 - 25 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre I(-2;5) et de rayon 5.

$\mathscr{C}' : (x - 3)^2 - 9 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\mathscr{C}'$ est donc le cercle de centre $J\left(3;\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{5}{2}$.

2) On détermine l'intersection des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ avec l'axe des abscisses.

Pour $\mathscr{C}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -2$ et $y = 0$

L'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses est réduite au point de coordonnées (-2;0) : donc $\mathscr{C}$ est tangent avec l'axe des abscisses.

Pour $\mathscr{C}'$: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 3$ et $y = 0$

L'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses est réduite au point de coordonnées (3;0) : donc $\mathcal{C}'$ est tangent avec l'axe des abscisses.

3) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6x - 10y + 5y + 4 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + (2x - 1)^2 + 4x - 10(2x - 1) + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 20x + 10 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ (x - 1)(x - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ et } y = 1) \text{ ou } (x = 3 \text{ et } y = 5)$$

Les 2 cercles sont sécants en deux points A et B.
Avec A(1;1) et B(3;5)

<u>Autre méthode sans calculer les coordonnées des deux points d'intersection :</u>
Pour montrer que les deux cercles sont sécants en deux points, il suffit de montrer que $IJ < r_1 + r_2$

Soit $IJ < 5 + \frac{5}{2}$

$IJ^2 = (x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2 = (3 + 2)^2 + \left(\frac{5}{2} - 5\right)^2 = 25 + \frac{25}{4} = 25 \times \frac{5}{4}$

Donc $IJ = \frac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{,}6$

et $5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

D'où $IJ < 7{,}5$
Donc les deux cercles sont bien sécants en deux points.

4) a) On a alors $\Omega A = \Omega B$
Soit $\Omega A^2 = \Omega B^2$

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

Soit : $(1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (3 - a)^2 + (5 - b)^2$

Soit : $1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 = 9 - 6a + a^2 + 25 - 10b + b^2$

Soit : $2 - 2a - 2b = 34 - 6a - 10b$

Soit : $4a + 8b - 32 = 0$

Soit $a + 2b - 8 = 0$

b) Une équation d'un cercle de $\mathcal{E}$ est du type :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \Omega A^2$$

Or $b = \dfrac{8 - a}{2}$

$\Omega A^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = (1 - a)^2 + \left(\dfrac{a - 6}{2}\right)^2$

Une équation du cercle cherché est donc :

$$(x - a)^2 + \left(y - \frac{8 - a}{2}\right)^2 = (1 - a)^2 + \left(\frac{a - 6}{2}\right)^2$$

c) Il faut que le système suivant est une solution :

$$\begin{cases} (x - a)^2 + \left(y - \dfrac{8 - a}{2}\right)^2 = (1 - a)^2 + \left(\dfrac{a - 6}{2}\right)^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Soit $(x - a)^2 = (1 - a)^2 + \left(\dfrac{a - 6}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{8 - a}{2}\right)^2$

Il faut donc que $(1 - a)^2 + \left(\dfrac{a - 6}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{8 - a}{2}\right)^2 >= 0$

Soit : $1 - 2a + a^2 + \dfrac{1}{4}(a^2 - 12a + 36 - 64 + 16a - a^2) \geq 0$

Soit : $a^2 - 2a + 1 + \dfrac{1}{4}(4a - 28) \geq 0$

Soit : $a^2 - 2a + 1 + a - 7 \geq 0$

Soit : $a^2 - a - 6 \geq 0$

Soit $(a - 3)(a + 2) \geq 0$

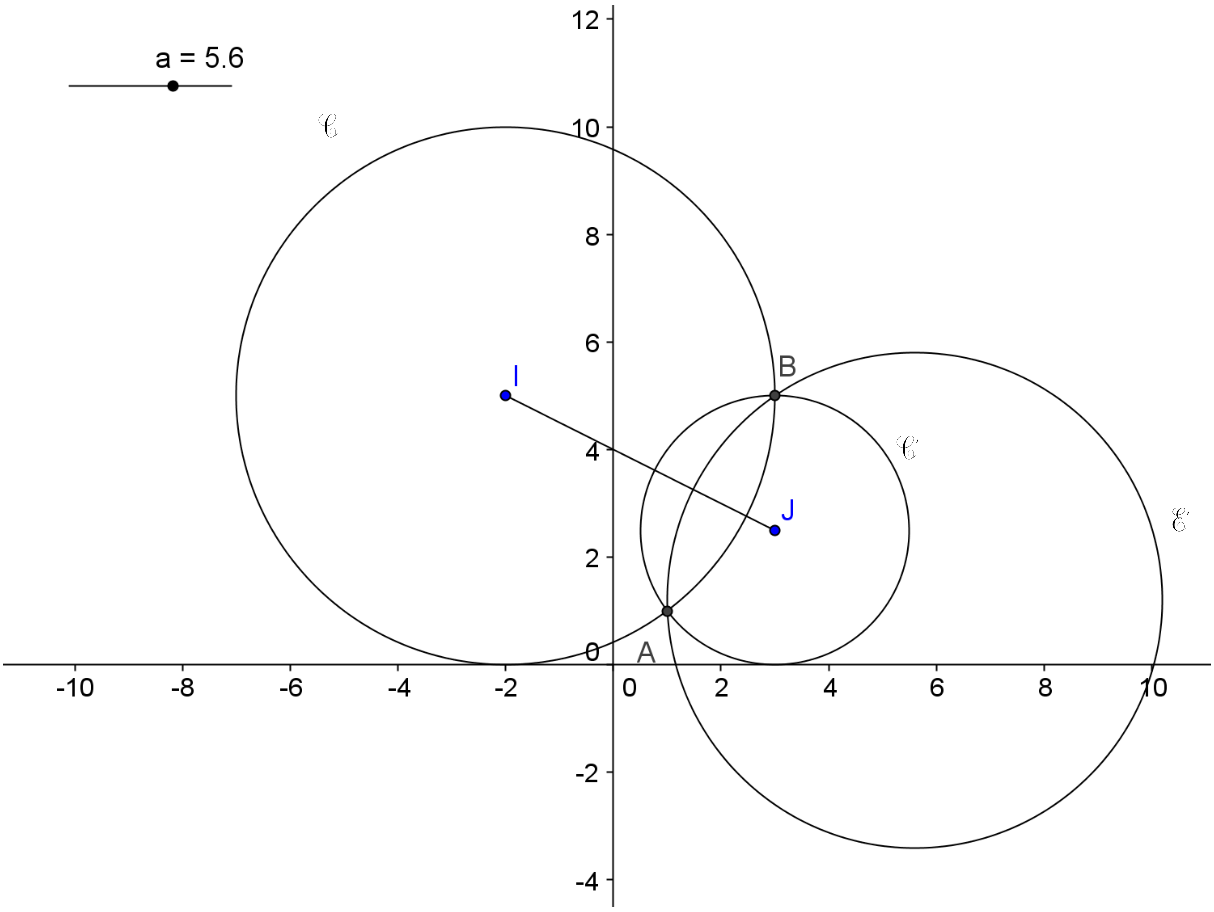
Soit $a \in]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$

Remarque : Pour $a = -2$, on retrouve le cercle $\mathcal{C}$ tangent à (Ox) et pour $a = 3$, on retrouve le cercle $\mathcal{C}'$ tangent à (Ox).

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

Figure Géogebra



Exercice 4 : Appliquer une formule de duplication

a) On a $\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = 2\times\cos^2(2x) - 1 = 2\times(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$
   Soit $\cos(4x) = 8\times\cos^4 x - 8\times\cos^2 x + 1$.

b) On prend $x = \dfrac{\pi}{12}$

   On obtient :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 1 = \cos\frac{\pi}{3}$$

   Soit : $8\cos^4\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \dfrac{1}{2} = 0$ car $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

c) En posant, $y = \cos x$, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ est solution de l'équation de degré 4 suivante :

   $8y^4 - 8y^2 + \dfrac{1}{2} = 0$

   Or $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$ car $0 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{2}$

Exercices préparation composition troisième trimestre

CORRECTION

Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}}$ ou $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}}$

Or $\cos\frac{\pi}{12} > \cos\frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{12} > \frac{\pi}{3}$ et la fonction cosinus est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} \approx 0{,}9659$

Exercice 5 : Théorème de Napoléon

a) La hauteur du triangle équilatéral CB'A de côté b est égal à $b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

F est le centre de gravité du triangle CB'A.

Donc $AF = \frac{2}{3}\times b\times\frac{\sqrt{3}}{2} = b\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

De même $AG = c\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\widehat{GAF} = \widehat{GAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF}$

Or $\widehat{GAB} = \widehat{CAF} = \frac{\pi}{6}$ car les triangles ABC et CB'A sont équilatéraux et que (AG) et (AF) sont les bissectrices des angles $\widehat{BAC'}$ et $\widehat{CAB'}$ dont la mesure est $\frac{\pi}{3}$ (60°).

Donc $\widehat{GAF} = \alpha + \frac{\pi}{3}$

En appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle AFG, on obtient alors:

$FG^2 = AG^2 + AF^2 - 2\times AG\times AF\times\cos(\widehat{GAF})$

Soit : $FG^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\times bc\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

Soit : $FG^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - 2\times b\times c\times\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b) On a $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha\times\cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha\times\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\times\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\alpha$

On a donc :

$FG^2 = \frac{1}{3}\left(b^2 + c^2 - bc\times\cos\alpha + bc\times\sqrt{3}\times\sin\alpha\right)$

CORRECTION

$FG^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{3}\times bc\times\sin\alpha$.

Or $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

D'où : $FG^2 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - bc\cos\alpha) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times S$.

c) On applique le theorem d'Al-kashi dans letriangle ABC :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

Soit : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\times\cos\alpha$

Donc $bc\times\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

D'où : $b^2 + c^2 - bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Et donc :

$FG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times S$

d) Pour des raisons des rôles symétriques des longueurs a, b et c, on aura alors :

$FG^2 = EF^2 = EG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\times S$

Donc EF = FG = EG et le triangle EFG est équilatéral.