(Utilisation d'un changement de variable)

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $4x^2 - 35 - \dfrac{9}{x^2} = 0$

Exercice 2 : Equation symétrique

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation (E) :
$2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$

1) a) 0 est-il solution de (E) ?

   b) Démontrer que (E) équivaut à :

$$2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \quad (E')$$

2) Pour tout réel x non nul, on pose $X = x + \dfrac{1}{x}$

   a) Calculer X^2 en fonction de x.

   b) Démontrer que (E') équivaut à :

$$X = x + \frac{1}{x} \text{ et } 2X^2 - 9X + 4 = 0$$

3) En déduire les solutions de (E).

(Utilisation d'un changement de variable)

CORRECTION

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

b) $4x^2 - 35 - \frac{9}{x^2} = 0$

a) On pose $X = x^2$

L'équation devient alors : $4X^2 - 5X^2 + 1 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-5)^2 - 4\times4\times1 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

Les solutions en X sont donc :

$$X_1 = \frac{5-3}{8} \text{ et } X_2 = \frac{5+3}{8}$$

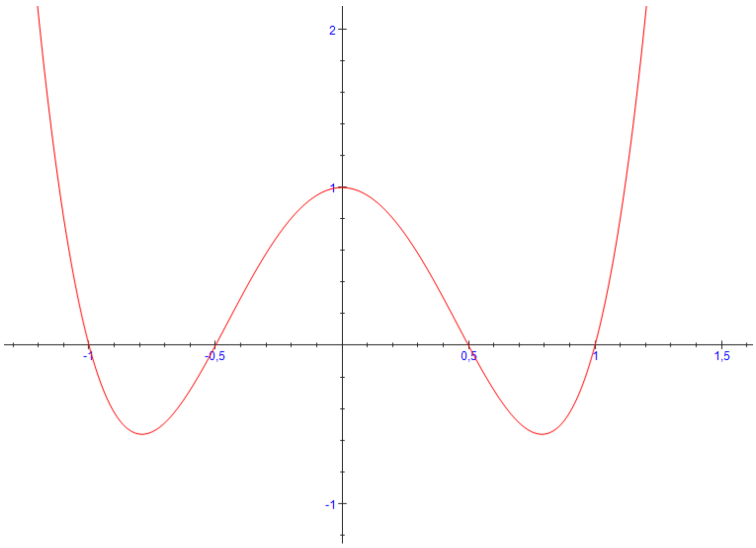
Soit $X_1 = \frac{1}{4}$ et $X_2 = 1$

On résout alors les deux équations en x : $x^2 = \frac{1}{4}$ et $x^2 = 1$.

Il y a alors quatre solutions en x : $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -1 et 1.

Donc $S = \left\{-1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right\}$

Vérification graphique :



b) Pour x non nul, on pose $X = x^2$

L'équation devient : $4X - 35 - \frac{9}{X} = 0$

En multipliant par X (avec X non nul), on obtient :

$4X^2 - 35X - 9 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-35)^2 - 4\times4\times(-9) = 1369 = 37^2$

(Utilisation d'un changement de variable)

CORRECTION

Les solutions en X sont donc : $X_1 = \frac{35-37}{8} = -\frac{1}{4}$ et $X_2 = \frac{35+37}{8} = 9$

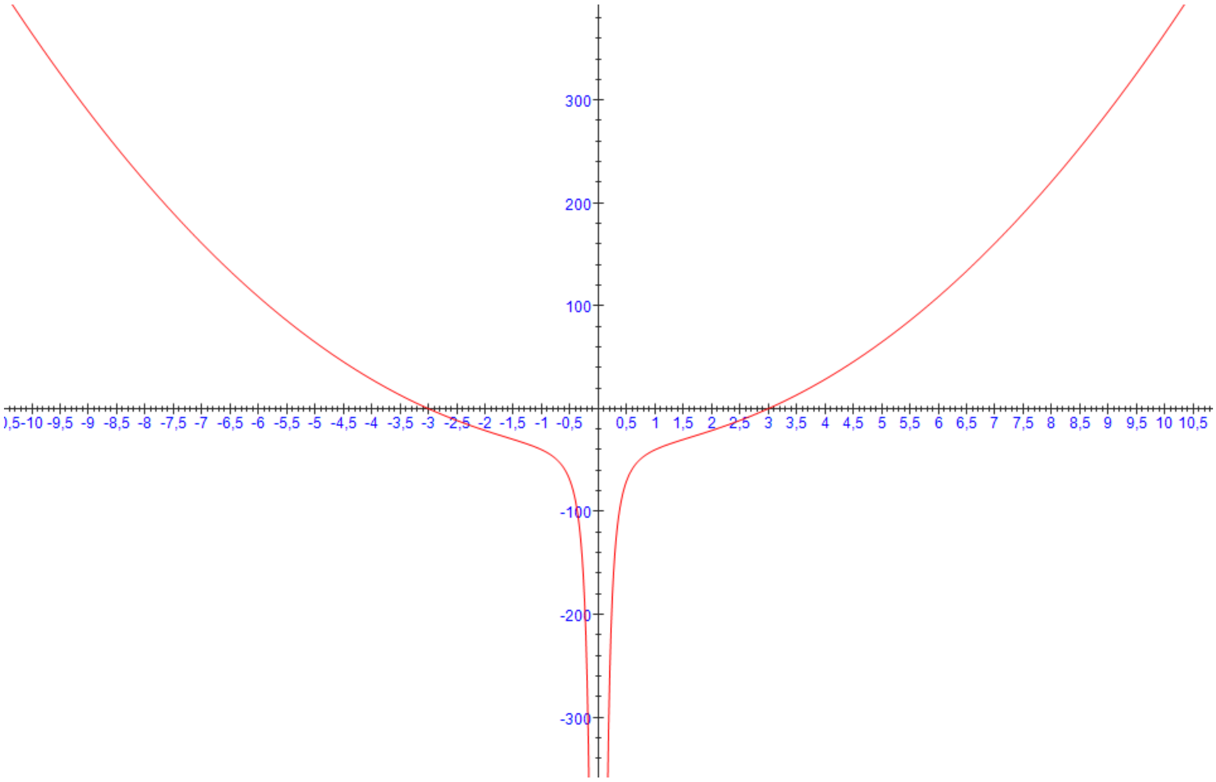
On résout alors les deux équations : $x^2 = -\frac{1}{4}$ et $x^2 = 9$

La première n'a pas de solution car un carré est toujours positif ou nul dans $\mathbb{R}$.

La deuxième a pour solutions -3 et 3.

Donc S = {-3 ;3}

Vérification graphique :



Exercice 3 : Equation symétrique

Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation (E) :

$2x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 9x + 2 = 0$

1) a) 0 est-il solution de (E) ?
   b) Démontrer que (E) équivaut à :

$$2x^2 - 9x + 8 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \text{ (E')}$$

2) Pour tout réel x non nul, on pose $X = x + \frac{1}{x}$
   a) Calculer X^2 en fonction de x.
   b) Démontrer que (E') équivaut à :

(Utilisation d'un changement de variable)

CORRECTION

$$X = x + \frac{1}{x} \text{ et } 2X^2 - 9X + 4 = 0$$

3) En déduire les solutions de (E).

1) a) 0 n'est pas solution de (E).

c) Pour x différent de 0, on obtient directement l'équation (E') équivalente à (E) en divisant par x^2 le membre de gauche de l'équation (E).

2) a) $X^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

b) (E') $\Leftrightarrow 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2(X^2 - 2) - 9X + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 2X^2 - 9X + 4 = 0$

On a donc bien l'équivalence : (E') $\Leftrightarrow 2X^2 - 9X + 4 = 0$ et $X = x + \frac{1}{x}$

3) On résout l'équation du second degré en X : $2X^2 - 9X + 4 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-9)^2 - 2\times4\times4 = 81 - 32 = 49 = 7^2$

Les solutions sont $X_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{9+7}{4} = 4$.

On résout ensuite les deux équations du second degré en x :

$\frac{1}{2} = x + \frac{1}{x}$ et $4 = x + \frac{1}{x}$

La première est équivalente à : $2x^2 - x + 2 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 2\times2 = -3 < 0$

Cette première équation n'a pas de solution réelle.

La deuxième équation est équivalente à : $x^2 - 4x + 1 = 0$

Le discriminant est : $\Delta = (-4)^2 - 4 = 12 > 0$

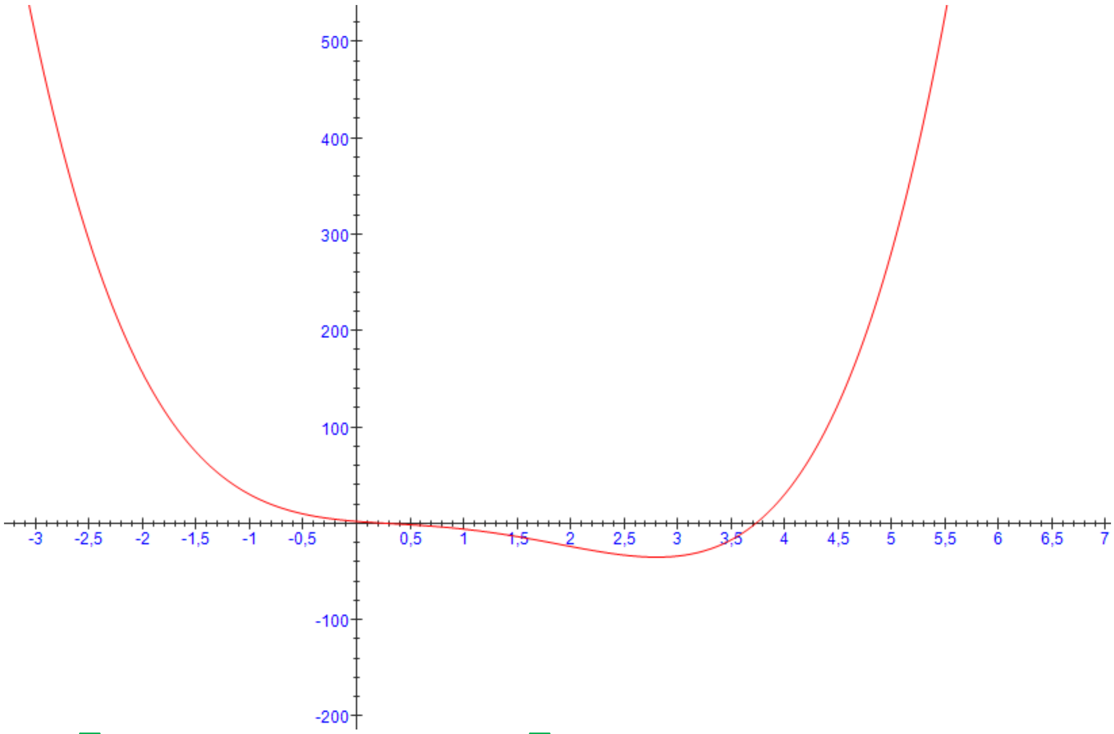
Les solutions sont $x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions de l'équation initiale (E) est donc :

$$S = \{2 - \sqrt{3} \,;\, 2 + \sqrt{3}\}$$

CORRECTION

Vérification graphique :



$2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$ et $2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73$