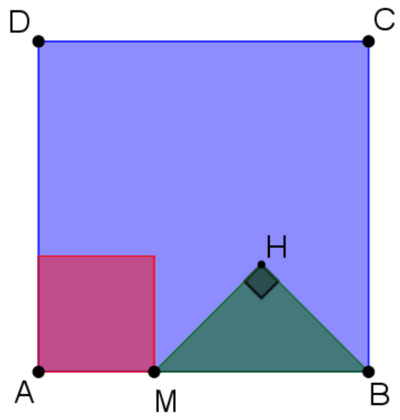
**Exercice 1** : (5 points)
Résoudre les équations suivantes :
(Ne pas oublier de donner l'ensemble des solutions.)

1) $x(2x - 1) = x + 2x^2 + 1$
2) $(2x - 1)(x + 1) - (2x - 1)(3x - 5) = 0$
3) $(2x + 3)(x + 5) = 15$
4) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$
5) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 2} = 0$

**Exercice 2** (5 points)



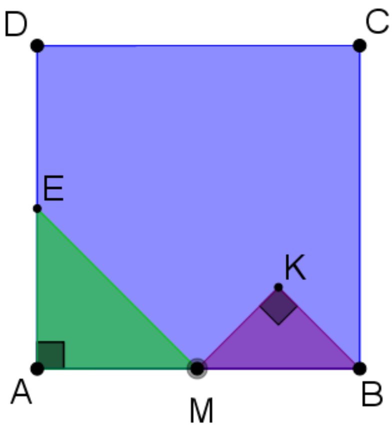

Le carré ABCD, ci-contre a un côté de longueur 8 cm. M est un point pris au hasard sur le segment [AB]. On construit, à l'intérieur du carré ABCD, le carré de côté [AM] et le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [MB].
On s'intéresse aux aires du petit carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.
On pose x = AM.

1) Donner l'aire $\mathcal{A}_C$ du carré en fonction de x.
2) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_T$ du triangle en fonction de x est $\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2$.
3) Donner l'aire $\mathcal{A}_m$ du motif en fonction de x.
4) A l'aide de calculatrice et des courbes représentant les trois fonctions $\mathcal{A}_C$, $\mathcal{A}_T$ et $\mathcal{A}_m$, répondre aux questions suivantes :
   Est-il possible de faire en sorte que
   a) l'aire du motif soit de 16 $cm^2$ ?
   b) l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
   c) l'aire du motif soit la plus petite possible ?
5) Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de ces trois problèmes.

**Exercice 1** : (5 points)
Résoudre les équations suivantes :
(Ne pas oublier de donner l'ensemble des solutions.)

1) $(x - 1)(x + 3) = x^2$
2) $(2x + 1)(x + 1) - (2x - 3)(x + 1) = 0$
3) $(-3x + 2)(x + 1) = 2$
4) $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$
5) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = 0$

**Exercice 2** (5 points)




Le carré ABCD, ci-contre a un côté de longueur 10 cm. M est un point pris au hasard sur le segment [AB]. On construit, à l'intérieur du carré ABCD, le triangle AEM rectangle isocèle en A et le triangle MBK rectangle isocèle d'hypoténuse [MB].
On s'intéresse aux aires des deux triangles rectangles et du motif constitué par ces deux triangles.
On pose x = AM.

1) Donner l'aire $\mathcal{A}_{AEM}$ du triangle AEM en fonction de x.
2) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_{MBK}$ du triangle MBK en fonction de x est $\left(5 - \dfrac{x}{2}\right)^2$.
3) Donner l'aire $\mathcal{A}_m$ du motif en fonction de x.
4) A l'aide de calculatrice et des courbes représentant les trois fonctions $\mathcal{A}_{AEM}$, $\mathcal{A}_{MBK}$ et $\mathcal{A}_{m}$, répondre aux questions suivantes :
   Est-il possible de faire en sorte que
   a) l'aire du motif soit de 16 cm² ?
   b) l'aire du triangle AEM soit égale à l'aire du triangle MBK ?
   c) l'aire du motif soit la plus petite possible ?
5) Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de ces trois problèmes.

**CORRECTION**

**<u>Exercice 1</u>** : (5 points)

Résoudre les équations suivantes:
(Ne pas oublier de donner l'ensemble des solutions.)

1) $x(2x - 1) = x + 2x^2 + 1$

$x(2x - 1) = x + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x = x + 2x^2 + 1$

$\Leftrightarrow -2x = 1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $(2x - 1)(x + 1) - (2x - 1)(3x - 5) = 0$

$(2x - 1)(x + 1) - (2x - 1)(3x - 5) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)[(x + 1) - (3x - 5)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(-2x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0$ ou $-2x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 3$

$S = \left\{\dfrac{1}{2};3\right\}$

3) $(2x + 3)(x + 5) = 15$

$(2x + 3)(x + 5) = 15 \Leftrightarrow 2x^2 + 10x + 3x + 15 = 15$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 13x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x + 13) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{13}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{13}{2};0\right\}$

4) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$

$\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ et $x + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$ et $x \neq -2$

$\Leftrightarrow (x = -2$ ou $x = 2)$ et $x \neq -2$

$\Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

5) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 2} = 0$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)}{x(x+2)} + \dfrac{x}{x(x+2)} = 0$

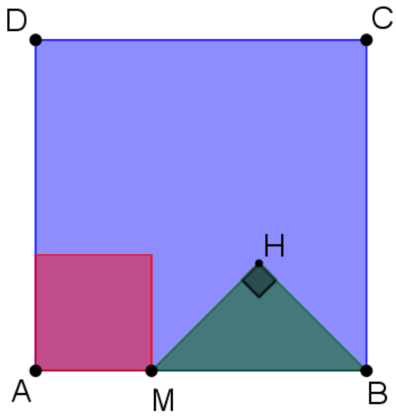
CORRECTION

$\Leftrightarrow 2x + 2 = 0$ et $x(x + 2) \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ et $x \neq 0$ et $x \neq -2$

$S = \{-1\}$

**Exercice 2** (5 points)




Le carré ABCD, ci-contre a un côté de longueur 8 cm.
M est un point pris au hasard sur le segment [AB]. On construit, à l'intérieur du carré ABCD, le carré de côté [AM] et le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [MB].
On s'intéresse aux aires du petit carré, du triangle et du motif constitué par le carré et le triangle.
On pose x = AM.

1) Donner l'aire $\mathcal{A}_C$ du carré en fonction de x.
2) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_t$ du triangle en fonction de x est $\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2$.
3) Donner l'aire $\mathcal{A}_m$ du motif en fonction de x.
4) A l'aide de calculatrice et des courbes représentant les trois fonctions $\mathcal{A}_C$, $\mathcal{A}_T$ et $\mathcal{A}_m$, répondre aux questions suivantes :
   Est-il possible de faire en sorte que
   a) l'aire du motif soit de 16 cm² ?
   b) l'aire du triangle soit égale à l'aire du carré ?
   c) l'aire du motif soit la plus petite possible ?
5) Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de ces trois problèmes.

1) L'aire du carré de côté [AM] est $\mathcal{A}_C = AM^2 = x^2$

2) L'aire du triangle MBH rectangle isocèle en H est $\mathcal{A}_t = \dfrac{MH \times HB}{2} = \dfrac{MH^2}{2}$

   On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MBH rectangle en H :

   $MH^2 + HB^2 = MB^2$

   Comme MH = HB, alors $2MH^2 = MB^2$

   $MB = AB - AM = 8 - x$

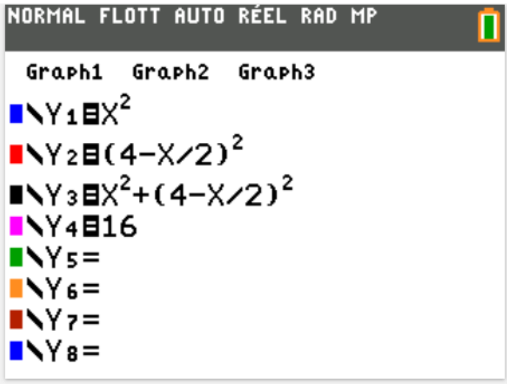
   Donc $MH^2 = \dfrac{MB^2}{2} = \dfrac{(8 - x)^2}{2}$

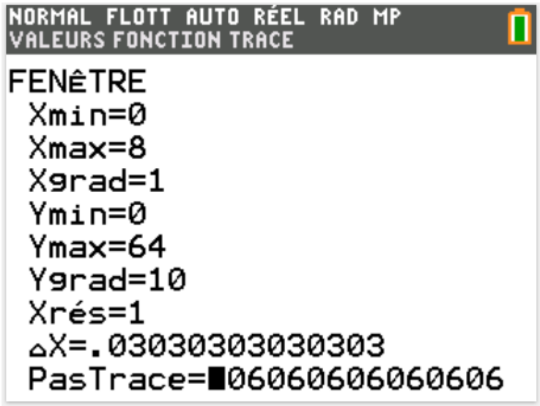
   D'où : $\mathcal{A}_t = \dfrac{MH^2}{2} = \dfrac{(8 - x)^2}{4} = \left(\dfrac{8 - x}{2}\right)^2 = \left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2$

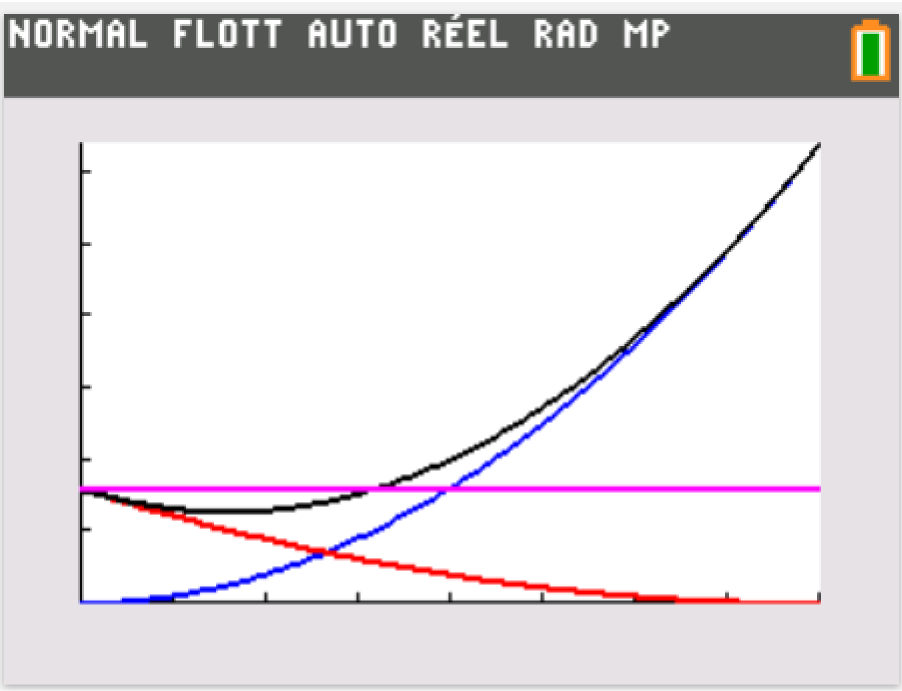
CORRECTION

3) $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_C + \mathcal{A}_T = x^2 + \left(4 - \dfrac{x}{2}\right)^2$

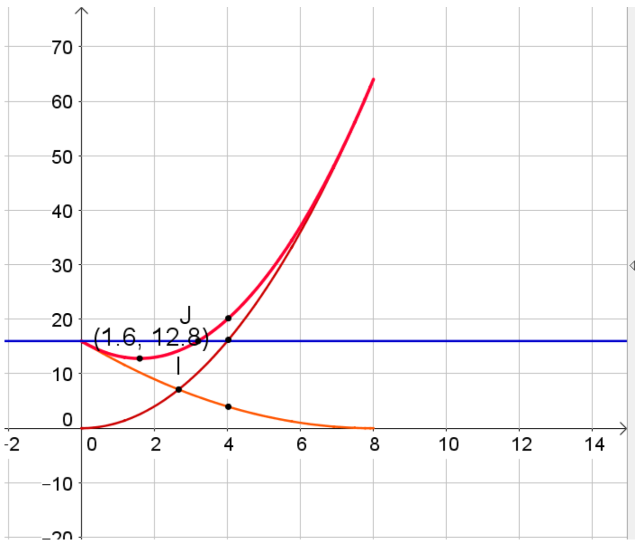
4) Avec la calculatrice :




Avec GeoGebra :



**CORRECTION**

a) Il semble que l'équation $\mathcal{A}_m(x) = 16$ ait deux solutions : $x = 0$ et $x \approx 3,2$.

b) Les deux courbes représentant les fonctions $\mathcal{A}_c$ et $\mathcal{A}_t$ ont un point d'intersection d'abscisse environ égale à 2,7.
Il semble donc que l'aire du carré et l'aire du triangle soit égale pour AM proche de 2,7 cm.

c) Il semble que la fonction $\mathcal{A}_m$ admet un minimum sur [0;8] pour $x \approx 1,6$.
L'aire du motif serait donc minimale pour $AM \approx 1,6$ cm.

5) a) $\mathcal{A}_m = 16$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4^2 - 2\times4\times\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16 - 4x + \frac{x^2}{4} = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 4x = 16 - 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{5}{4}x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{5}{4}x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4\times4}{5} = \frac{16}{5}$$

L'aire du motif est donc égale à 16 cm² pour $AM = \frac{16}{5} = 3,2$ cm

b) $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_t$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 - \frac{x}{2} \text{ ou } x = -4 + \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x}{2} = 4 \text{ ou } x - \frac{x}{2} = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 4 \text{ ou } \frac{x}{2} = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\times2}{3} \text{ ou } x = -8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ou } x = -8$$

Seule la solution positive convient : $x = \frac{8}{3}$

**CORRECTION**

Pour AM = $\frac{8}{3}$ cm l'aire du carré et l'aire du triangle sont égales.

c) $\mathcal{A}_m = x^2 + \left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + 16 - 4x + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4}x^2 - 4x + 16.$

On peut montrer que la forme canonique de $\mathcal{A}_m$ est :

$$\frac{5}{4}\times\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{64}{5}$$

Et comme $\frac{5}{4} > 0$, alors le minimum de $\mathcal{A}_m$ sur [0;8] vaut $\frac{64}{5}$ et il est atteint en $\frac{8}{5}$.

L'aire du motif est minimale pour AM = $\frac{8}{5}$ = 1,6 cm.

CORRECTION

**Exercice 1** : (5 points)

Résoudre les équations suivantes :

(Ne pas oublier de donner l'ensemble des solutions.)

1) $(x - 1)(x + 3) = x^2$

$(x - 1)(x + 3) = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x - 3 = x^2$

$\Leftrightarrow 2x = 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

2) $(2x + 1)(x + 1) - (2x - 3)(x + 1) = 0$

$(2x + 1)(x + 1) - (2x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)[(2x + 1) - (2x - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)\times 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = - 1$

$S = \{-1\}$

3) $(-3x + 2)(x + 1) = 2$

$(-3x + 2)(x + 1) = 2 \Leftrightarrow -3x^2 - 3x + 2x + 2 = 2$

$\Leftrightarrow -3x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow -x(3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{0; -\frac{1}{3}\right\}$

4) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$

$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ et $x - 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$ et $x \neq 3$

$\Leftrightarrow (x = - 3$ ou $x = 3)$ et $x \neq 3$

$\Leftrightarrow x = - 3$

$S = \{-3\}$

5) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 0$

$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = 0$

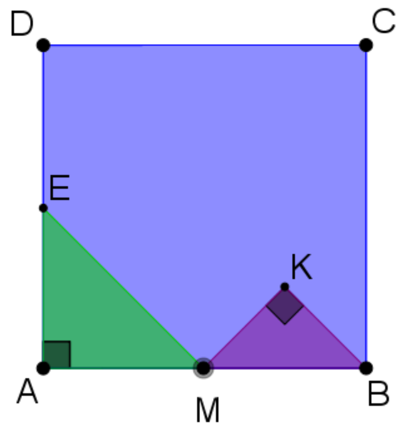
$\Leftrightarrow 2x = 0$ et $(x - 1)(x + 1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$S = \{0\}$

CORRECTION

**Exercice 2** (5 points)




Le carré ABCD, ci-contre a un côté de longueur 10 cm. M est un point pris au hasard sur le segment [AB]. On construit, à l'intérieur du carré ABCD, le triangle AEM rectangle isocèle en A et le triangle MBK rectangle isocèle d'hypoténuse [MB].

On s'intéresse aux aires des deux triangles rectangles et du motif constitué par ces deux triangles.

On pose x = AM.

1) Donner l'aire $\mathcal{A}_{AEM}$ du triangle AEM en fonction de x.
2) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_{MBK}$ du triangle MBK en fonction de x est $\left(5 - \frac{x}{2}\right)^2$.
3) Donner l'aire $\mathcal{A}_m$ du motif en fonction de x.
4) A l'aide de calculatrice et des courbes représentant les trois fonctions $\mathcal{A}_{AEM}$, $\mathcal{A}_{MBK}$ et $\mathcal{A}_{m}$, répondre aux questions suivantes :
   Est-il possible de faire en sorte que
   a) l'aire du motif soit de 16 cm² ?
   b) l'aire du triangle AEM soit égale à l'aire du triangle MBK ?
   c) l'aire du motif soit la plus petite possible ?
5) Donner les solutions exactes (ou à défaut une approximation) de ces trois problèmes.

1) $\mathcal{A}_{AEM} = \frac{AE \times AM}{2} = \frac{AM^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

2) L'aire du triangle MBK rectangle isocèle en K est $\mathcal{A}_{MBK} = \frac{MK \times KB}{2} = \frac{MK^2}{2}$

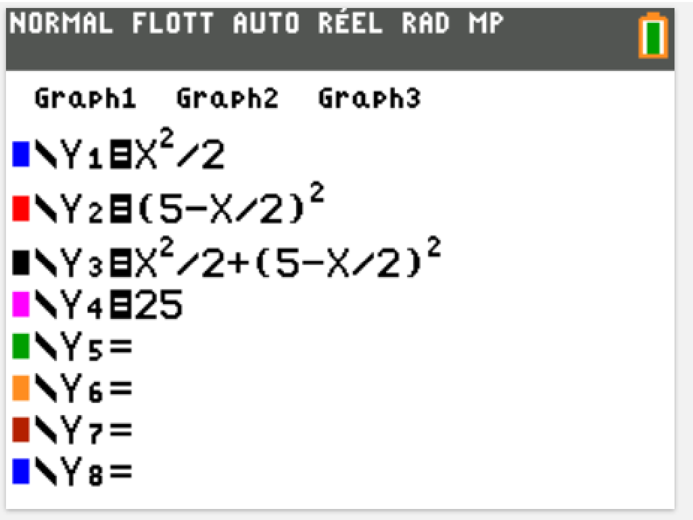
   On applique le théorème de Pythagore dans le triangle MBK rectangle en K :
   $MK^2 + KB^2 = MB^2$
   Comme MK = KB, alors $2MK^2 = MB^2$
   $MB = AB - AM = 10 - x$
   Donc $MK^2 = \frac{MB^2}{2} = \frac{(10-x)^2}{2}$

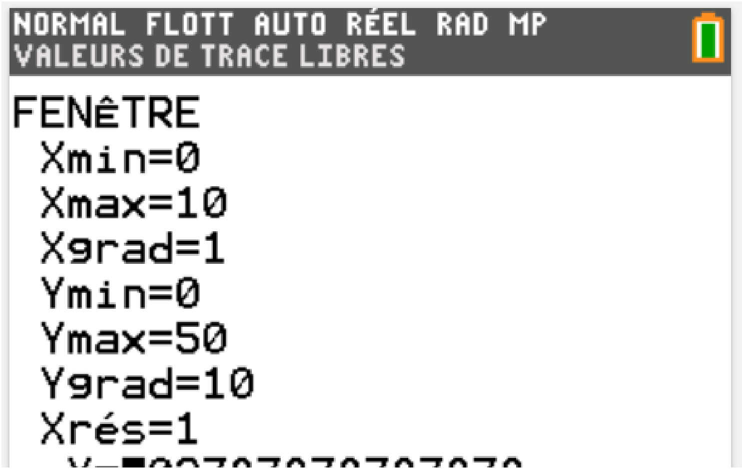
   D'où : $\mathcal{A}_{MBK} = \frac{MK^2}{2} = \frac{(10-x)^2}{4} = \left(\frac{10-x}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2$

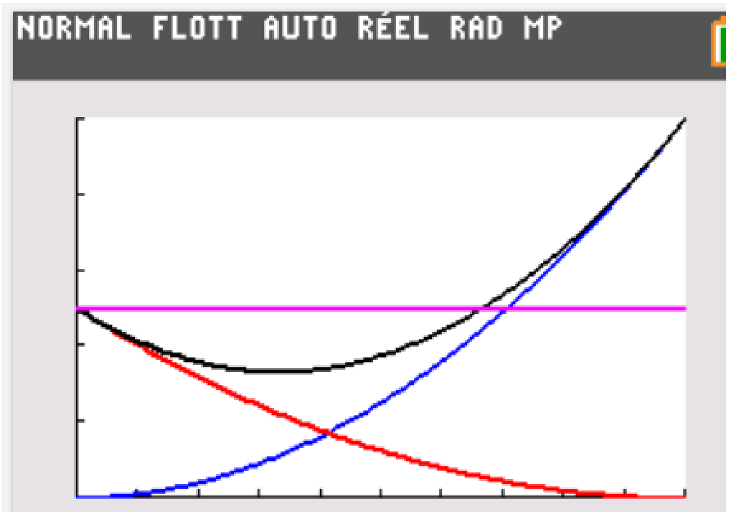
3) $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{AEM} + \mathcal{A}_{MBK} = \frac{x^2}{2} + \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2$

CORRECTION

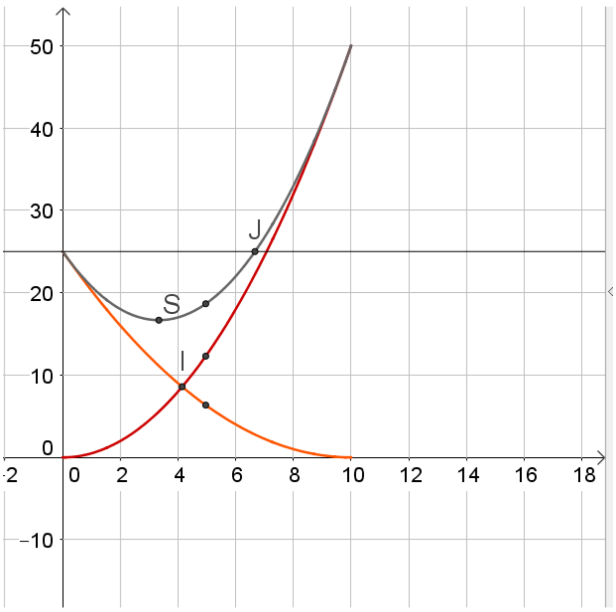
4) Avec la calculatrice :




Avec GeoGebra :



CORRECTION

a) Il semble que l'équation $\mathcal{A}_m(x) = 25$ ait deux solutions : $x = 0$ et $x \approx 6,7$.

b) Les deux courbes représentant les fonctions $\mathcal{A}_{AEM}$ et $\mathcal{A}_{MBK}$ ont un point d'intersection d'abscisse environ égale à 4,1.
Il semble donc que les aires des deux triangles soient égales pour AM proche de 4,1 cm.

c) Il semble que la fonction $\mathcal{A}_m$ admet un minimum sur [0;10] pour $x \approx 3,3$.
L'aire du motif serait donc minimale pour AM ≈ 3,3 cm.

5) a) $\mathcal{A}_m = 25$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 5^2 - 2\times5\times\frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + 25 - 5x + \frac{x^2}{4} = 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 5x = 25 - 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{3}{4}x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{5\times4}{3} = \frac{20}{3}$$

L'aire du motif est donc égale à 25 cm² pour $AM = \frac{20}{3} \approx 6,7$ cm

b) $\mathcal{A}_{AEM} = \mathcal{A}_{MBK}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2\times\left(5 - \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}\left(5 - \frac{x}{2}\right) \text{ ou } x = -\sqrt{2}\left(5 - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 5\sqrt{2} \text{ ou } x - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2} \text{ ou } x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}$$

CORRECTION

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\sqrt{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ ou } x = \frac{5\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{10\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{10\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}\times(2 - \sqrt{2})}{(4 - 2)} = 10\sqrt{2} - 10 = 10(\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}1$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 10\sqrt{2} + 10 = 10(\sqrt{2} + 1) \approx 24{,}1$$

Seule la solution comprise entre 0 et 10 convient : $10(\sqrt{2} - 1)$

Pour AM = $10(\sqrt{2} - 1)$ cm l'aire du carré et l'aire du triangle sont égales.

c) $\mathcal{A}_m = \frac{x^2}{2} + \left(5 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + 25 - 5x + \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 - 5x + 25.$

On peut montrer que la forme canonique de $\mathcal{A}_m$ est :

$$\frac{3}{4}\times\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{50}{3}$$

Et comme $\frac{3}{4} > 0$, alors le minimum de $\mathcal{A}_m$ sur [0;10] vaut $\frac{50}{3}$ et il est atteint en $\frac{10}{3}$.

L'aire du motif est minimale pour AM = $\frac{10}{3} \approx 3{,}3$ cm.