Seconde 2 IE3 sens de variation – fonctions affines 2014-2015 S1

Exercice 1 : (2 points)

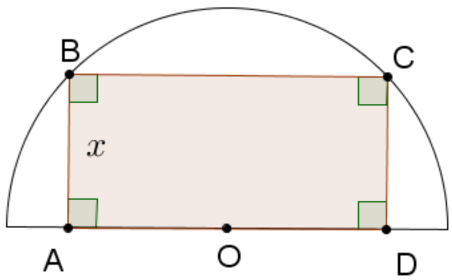
Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur ℝ :

- décroissante sur $]-\infty ;5[$ et sur $]9 ;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisses en 4, 7 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9 égal à 2.

Exercice 2 : (4,5 points)

ABCD est un rectangle inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 6 cm comme indiqué sur la figure ci-contre.

Ses côtés ont des longueurs variables ; on note x la longueur AB en cm.



1) a) Dans quel intervalle varie x ?

b) Justifier que $OA^2 + x^2 = 36$.

c) En déduire OA, puis AD en fonction de x.

d) Exprimer l'aire $S(x)$, en cm^2, du rectangle ABCD en fonction de x.

2) a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la fonction S et de la valeur x_0 pour laquelle il est atteint.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.

Exercice 3 : (3,5 points)

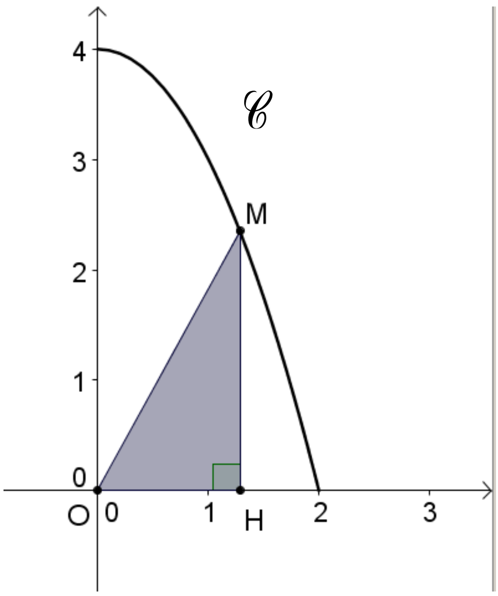
1) Déterminer la fonction affine f telle que $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - (x + 2)^2$
   a) Montrer que g est une fonction affine.
   b) Donner le sens de variation de g en justifiant.
   c) Résoudre l''inéquation $g(x) < 0$.

Exercice 1 : (2 points)

Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur IR :

- croissante sur] - ∞ ;-2[et sur]3 ;+ ∞[;
- décroissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisses en -4 et 1 ;
- elle atteint un minimum relatif en 3 égal à -6.

Exercice 2 : (4,5 points)



Un logo publicitaire doit avoir la forme ci-contre.

M est un point d'abscisse x de la courbe 𝒞 représentant la fonction f définie sur [0 ;2] par $f(x) = 4 - x^2$.

1) Exprimer l'aire du triangle OMH en fonction de x.
2) On considère la fonction S qui à x associe l'aire du triangle OMH.
   a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la fonction S et de la valeur x_0 pour laquelle il est atteint.
   Donner des valeurs approchées au dixième.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.

Exercice 3 : (3,5 points)

1) Déterminer la fonction affine f telle que f(-1) = -5 et f(2) = 4
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - (x + 3)^2$
   a) Montrer que g est une fonction affine.
   b) Donner le sens de variation de g en justifiant.
   c) Résoudre l''inéquation $g(x) \geq 0$.

Seconde 2 IE3 sens de variation – fonctions affines 2014-2015 S1

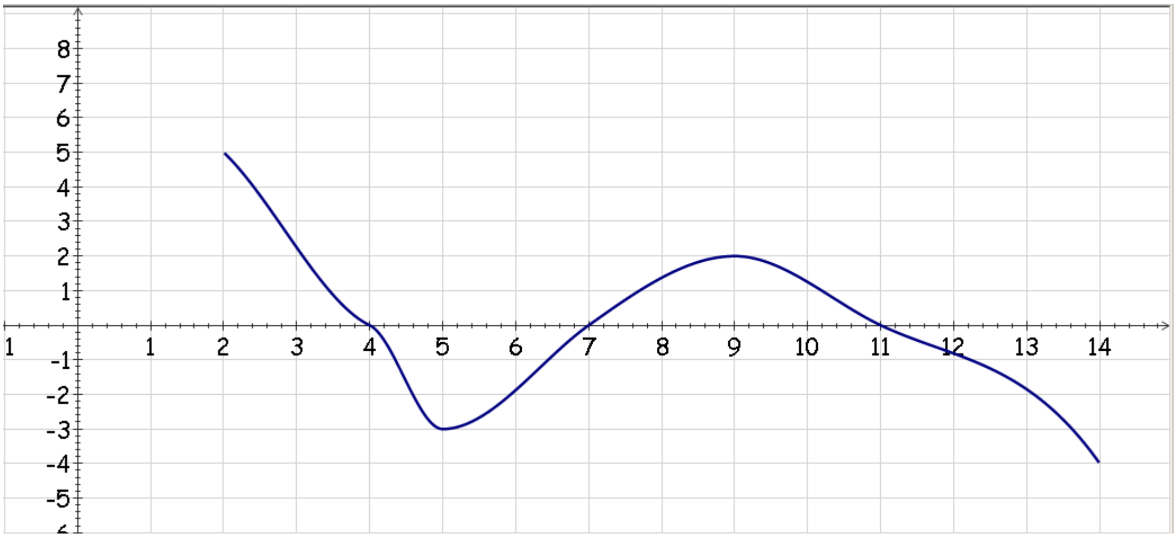
CORRECTION

Exercice 1 : (2 points)

Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur ℝ :

- décroissante sur]- ∞ ;5[et sur]9 ;+ ∞[;
- croissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisses en 4, 7 et 11 ;
- elle atteint un maximum relatif en 9 égal à 2.

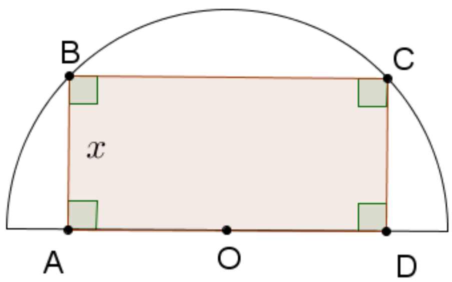
x	-∞		5		9		+∞
f(x)		↘		↗	2	↘	



Exercice 2 : (4,5 points)

ABCD est un rectangle inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon 6 cm comme indiqué sur la figure ci-contre.

Ses côtés ont des longueurs variables ; on note x la longueur AB en cm.



1) a) Dans quel intervalle varie x ?

b) Justifier que $OA^2 + x^2 = 36$.

c) En déduire OA, puis AD en fonction de x.

d) Exprimer l'aire S(x), en cm², du rectangle ABCD en fonction de x.

2) a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée (à l'unité) du maximum de la fonction S et de la valeur x_0 (au dixième) pour laquelle il est atteint.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.

CORRECTION

1) a) AB varie entre 0 et le rayon du cercle.

Donc $x \in [0 ;6]$.

b) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en A, on a :

$$OB^2 = AB^2 + OA^2$$

Soit $6^2 = x^2 + OA^2$

Soit : $OA^2 + x^2 = 36$

c) $OA^2 = 36 - x^2$

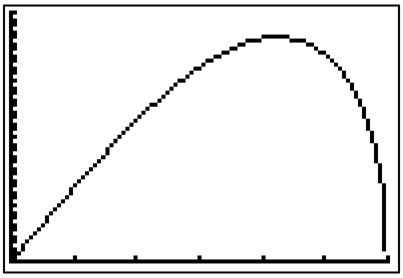
Donc $OA = \sqrt{36 - x^2}$

$AD = 2 \times OA = 2\sqrt{36 - x^2}$

d) $S(x) = AB \times AD = 2x\sqrt{36 - x^2}$

2) a)

Avec la calculatrice : tracé de la courbe associée à la fonction S sur l'intervalle [0 ;6]



FENETRE
Xmin=0
Xmax=6
Xgrad=1
Ymin=0
Ymax=40
Ygrad=1
Xres=

Avec la calculatrice : table de valeurs à partir de 4 avec un pas de 0,1 :

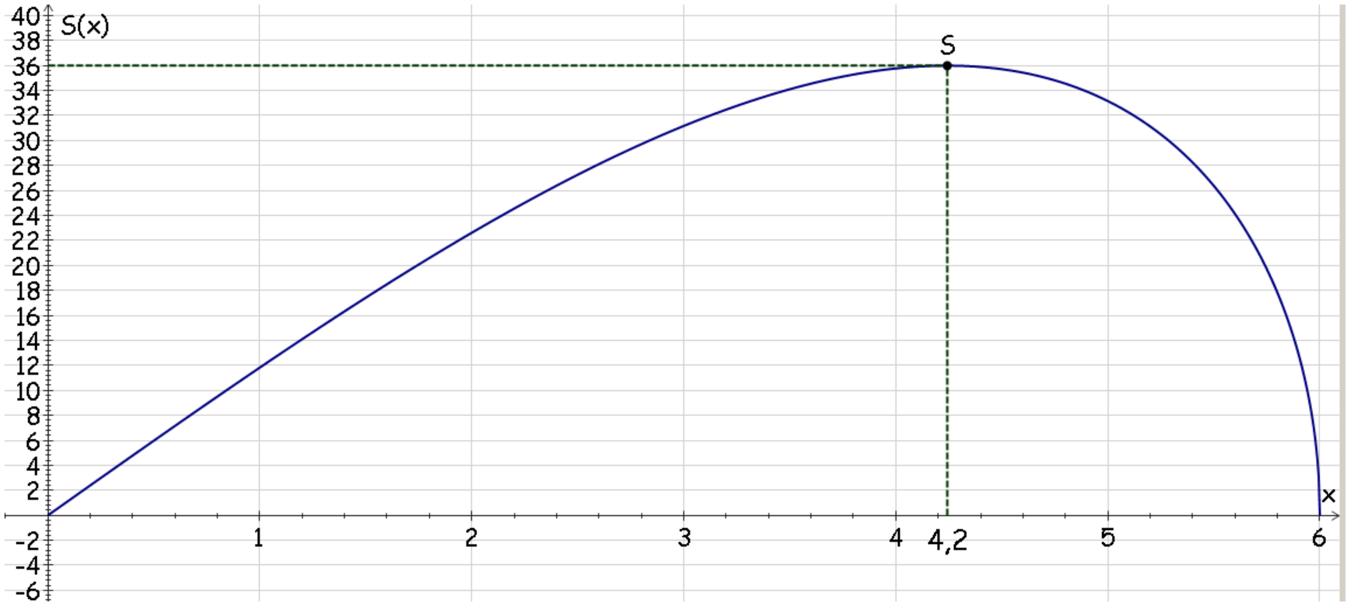
X	Y1
4	35.777
4.1	35.921
4.2	35.993
4.3	35.987
4.4	35.897
4.5	35.718
4.6	35.441

X=4

DEFINIR TABLE
DébTbl=
Pas=.1
Valeurs:Auto Dem
Calculs:Auto Dem

CORRECTION

Tracé plus précis de la courbe représentant la fonction f avec un grapheur (Graph'Easy) :



Par lecture graphique le maximum est environ 36 et il est atteint en $x_0 \approx 4{,}2$.

Remarque :

Vous apprendrez à calculer la valeur exacte de x_0 l'an prochain (avec la dérivée de la fonction S).

On peut montrer que $x_0 = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$

On vérifie que $S(3\sqrt{2}) = 2\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}\times\sqrt{36 - 18} = 6\times\sqrt{2}\times\sqrt{18} = 6\times 6 = 36$

La valeur exacte du maximum est donc 36.

b)

x	0		x_0		6
S(x)			36		
	0	↗		↘	0

Exercice 3 : (3,5 points)

1) Déterminer la fonction affine f telle que $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - (x + 2)^2$
   a) Montrer que g est une fonction affine.
   b) Donner le sens de variation de g en justifiant.
   c) Résoudre l''inéquation $g(x) < 0$.

1) Comme f est une fonction affine, on a $f(x) = ax + b$

avec $a = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$

$f(1) = -1 \iff -2\times 1 + b = -1$

$\iff b = -1 + 2 = 1$

Donc $f(x) = -2x + 1$

Vérification : $f(-1) = -2\times(-1) + 1 = 3$ et $f(1) = -2\times 1 + 1 = -1$

CORRECTION

Autre méthode :

$f(x) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}(x - 1) + f(1) = -2(x - 1) - 1 = -2x + 2 - 1 = -2x + 1$

2) a) $g(x) = x^2 - (x^2 + 4x + 4) = -4x - 4$

$g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -4$ et $b = -4$.

Donc g est bien une fonction affine

b) Comme $a = -4 < 0$, alors g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $g(x) < 0 \Leftrightarrow -4x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow -4x < 4$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{4}{-4}$ (Le sens de l'inéquation change car on divise par un nombre négatif.)

$\Leftrightarrow x > -1$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S =]-1 ; +\infty[$.

Seconde 2 IE3 sens de variation – fonctions affines 2014-2015 S2

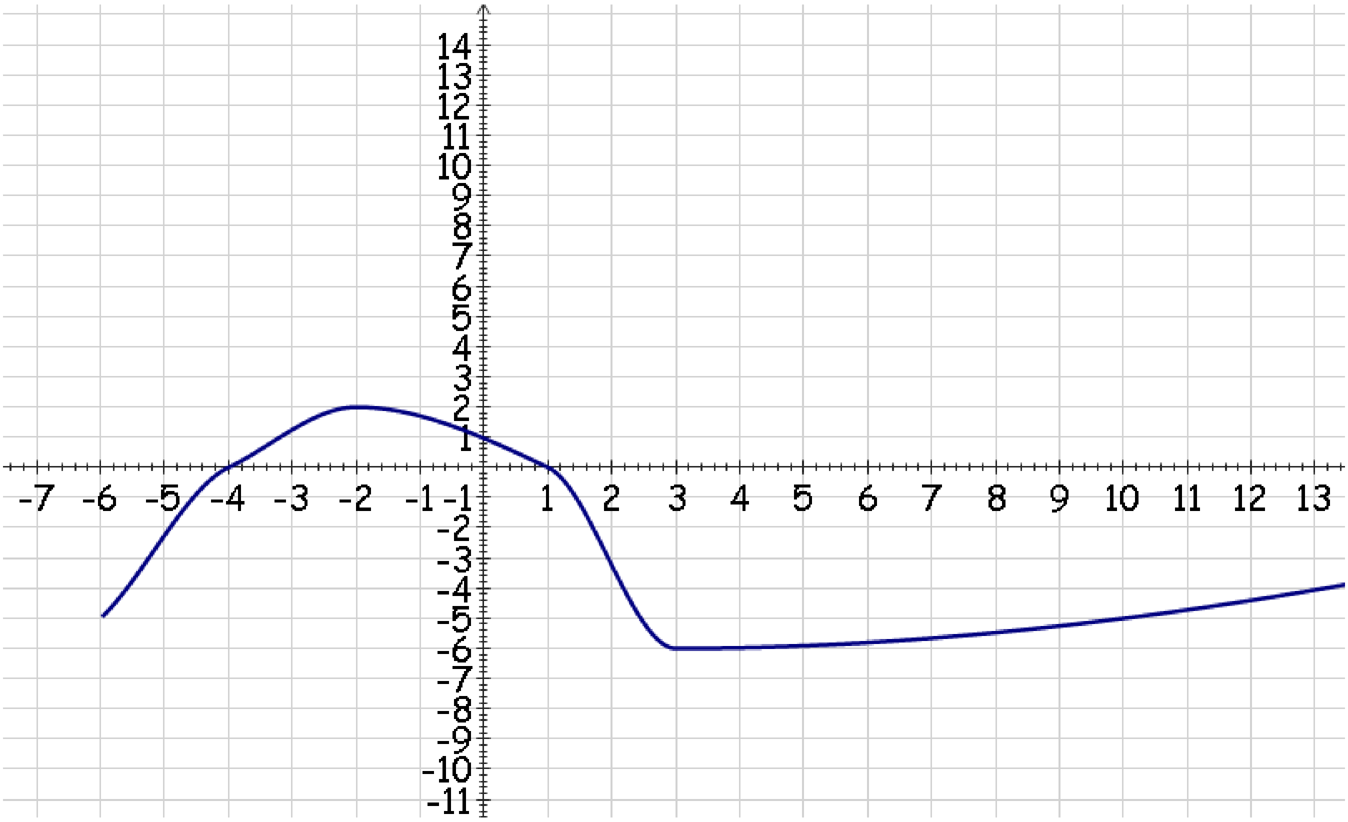
CORRECTION

Exercice 1 : (2 points)

Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur ℝ :

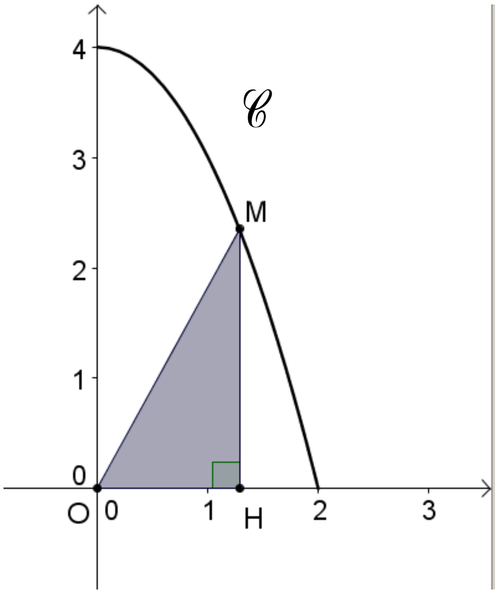
- croissante sur] - ∞ ;-2[et sur]3 ;+ ∞[;
- décroissante sinon ;
- elle coupe l'axe des abscisses en -4 et 1 ;
- elle atteint un minimum relatif en 3 égal à -6.

x	-∞		-2		3		+∞
f(x)		↗		↘	-6	↗	



CORRECTION

Exercice 2 : (4,5 points)



Un logo publicitaire doit avoir la forme ci-contre.

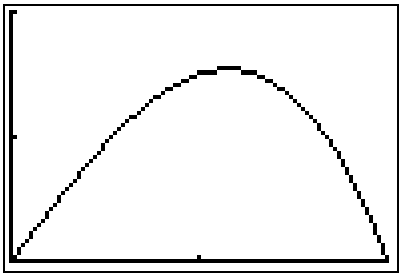
M est un point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur [0 ;2] par $f(x) = 4 - x^2$.

1) Exprimer l'aire du triangle OMH en fonction de x.
2) On considère la fonction S qui à x associe l'aire du triangle OMH.
a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la fonction S et de la valeur x_0 pour laquelle il est atteint.
Donner des valeurs approchées au dixième.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction S.

1) $A_{OHM} = \dfrac{OH \times HM}{2} = \dfrac{x \times (4 - x^2)}{2}$

2) a)

Avec la calculatrice : tracé de la courbe associée à la fonction S sur l'intervalle [0 ;2]



FENETRE
Xmin=0
Xmax=2
Xgrad=1
Ymin=0
Ymax=2
Ygrad=1
Xres=1

Avec la calculatrice : table de valeurs à partir de 1 avec un pas de 0,1 :

X	Y1
1	1.5
1.1	1.5345
1.2	1.536
1.3	1.5015
1.4	1.428
1.5	1.3125
1.6	1.152

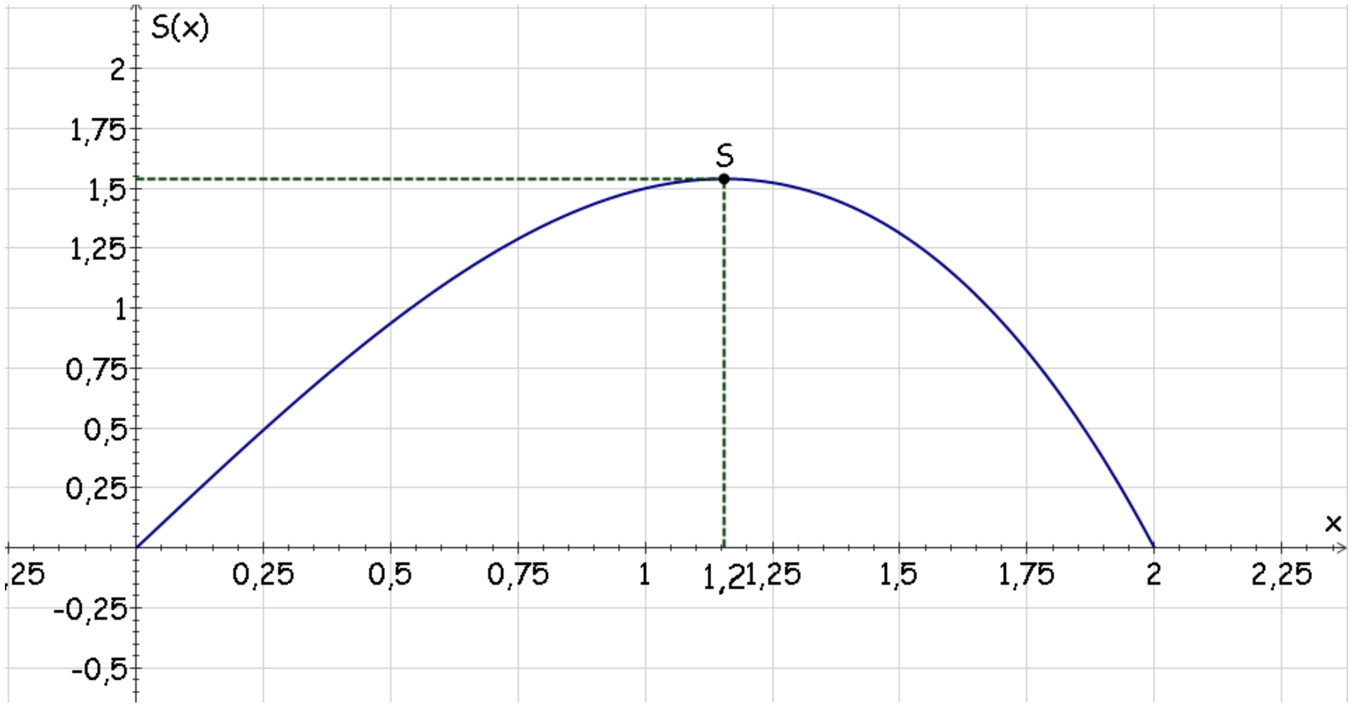
X=1

X	Y1
1	1.5
1.1	1.5345
1.2	1.536
1.3	1.5015
1.4	1.428
1.5	1.3125
1.6	1.152

X=1

CORRECTION

Tracé plus précis de la courbe représentant la fonction f avec un grapheur (Graph'Easy) :



Par lecture graphique le maximum est environ Max = 1,5 et il est atteint en $x_0 \approx 1,2$.

Remarque :

Vous apprendrez à calculer la valeur exacte de x_0 l'an prochain (avec la dérivée de la fonction S).

On peut montrer que $x_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$

Et $S\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} \times \left[4 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \left(4 - \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{12-4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{8}{3\sqrt{3}} \approx 1,53$

b)

x	0	x_0	2
S(x)	0 ↗	Max	↘ 0

Exercice 3 : (3,5 points)

1) Déterminer la fonction affine f telle que f(-1) = -5 et f(2) = 4
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 - (x+3)^2$
   a) Montrer que g est une fonction affine.
   b) Donner le sens de variation de g en justifiant.
   c) Résoudre l''inéquation $g(x) \geq 0$.

1) Comme f est une fonction affine, on a f(x) = ax + b

   avec $a = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{4 - (-5)}{2 - (-1)} = \dfrac{9}{3} = 3$

   $f(2) = 4 \Leftrightarrow 3 \times 2 + b = 4$

   $\Leftrightarrow b = 4 - 6 = -2$

CORRECTION

Donc $f(x) = 3x - 2$

<u>Vérification</u> : $f(-1) = 3\times(-1) - 2 = -5$ et $f(2) = 3\times2 - 2 = 4$

<u>Autre méthode</u> :

$$f(x) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}(x - 2) + f(2) = 3(x - 2) + 4 = 3x - 6 + 4 = 3x - 2$$

2) a) $g(x) = x^2 - (x^2 + 6x + 9) = -6x - 9$

$g(x)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -6$ et $b = -9$.

Donc g est bien une fonction affine

d) Comme $a = -6 < 0$, alors g est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -6x - 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow -6x \geq 9$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{9}{-6}$ (Le sens de l'inéquation change car on divise par un nombre négatif.)

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $S = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right]$.