Classes de Secondes

Mathématiques

15 avril 2015

Nom :	**Prénom :**	**Classe :**

Note : /40

Durée 2 heures

Observations :

Il sera tenu compte de la clarté et de la présentation de la copie.

La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

Remarque : Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme décimale.

Lors d'une course cycliste, 200 coureurs sont engagés.
Dans ce peloton, 15 % des coureurs dont 10 français ont moins de 25 ans.
L'organisation constate que $\frac{4}{5}$ du peloton est formé de coureurs étrangers.

1. Compléter, sans justifier le tableau suivant :

	Moins de 25 ans	25 ans ou plus	Total
Français			
Etrangers			
Total			200

On choisit un coureur au hasard dans le peloton.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants.

A : "le coureur a moins de 25 ans"	B : "le coureur est français"

3. Calculer la probabilité $p(A \cap B)$ puis en déduire (en rappelant la formule du cours) la probabilité $p(\overline{A \cup B})$.

4. Traduire par une phrase l'évènement $\overline{A \cap B}$ puis calculer la probabilité $p(\overline{A \cap B})$

5. On considère l'évènement C : "le coureur est un étranger de moins de 25 ans"
a) Exprimer l'évènement C en fonction des évènements A et B.

b) Calculer la probabilité $p(C)$.

Exercice 2 :

Une boutique vend des jeux vidéo d'occasion.
Le prix unitaire des jeux est fixé de la façon suivante :

- pour un seul jeu acheté, le prix est de 30€ ;
- on applique une réduction de 2€ à ce prix unitaire par jeu supplémentaire acheté.

Ainsi, pour 4 jeux achetés, le prix unitaire est : $30-3\times 2=24$€.
La recette totale est : $4\times 24=96$€.

Soit $R(x)$ la recette, en euros, réalisée lors d'une vente de x jeux achetés, où x est un entier supérieur à 1.

1. Exprimer le prix unitaire de vente en fonction de x.

2. Montrer que $R(x) = 32x - 2x^2$.

3. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $R(x) = -2(x-8)^2 + 128$.

   b) En déduire le montant de la recette maximale pour une vente.

4. Deux amis souhaitent acheter chacun deux jeux vidéo. Est-il préférable qu'ils payent séparément, ou qu'un seul achète les quatre jeux ?

Exercice 3 :

1ère partie :
On considère l'algorithme ci-dessous qui vérifie si deux vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(c;d)$ sont colinéaires.

```
1.    Liste des variables utilisées
2.        a ; b ; c ; d   :  nombres
3.    Entrées
4.        Demander a, b, c, d
5.    Traitements

6.        Si ………………………………………………………Alors
7.            Afficher « colinéaires »
8.        Sinon
9.            Afficher « non colinéaires »
10.       Fin si
```

1. Compléter la ligne 6

2ème partie :
Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J) , on considère les points :
A (4 ; 1)   B (2 ; 5)   C (−2 ; 7)   D (6; -3)

1. Placer les points A, B, C et D sur la figure ci-dessous puis la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que les droites (OD) et (BC) sont parallèles.

3. Placer les points F, G et H tels que :
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO}$ $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO}$

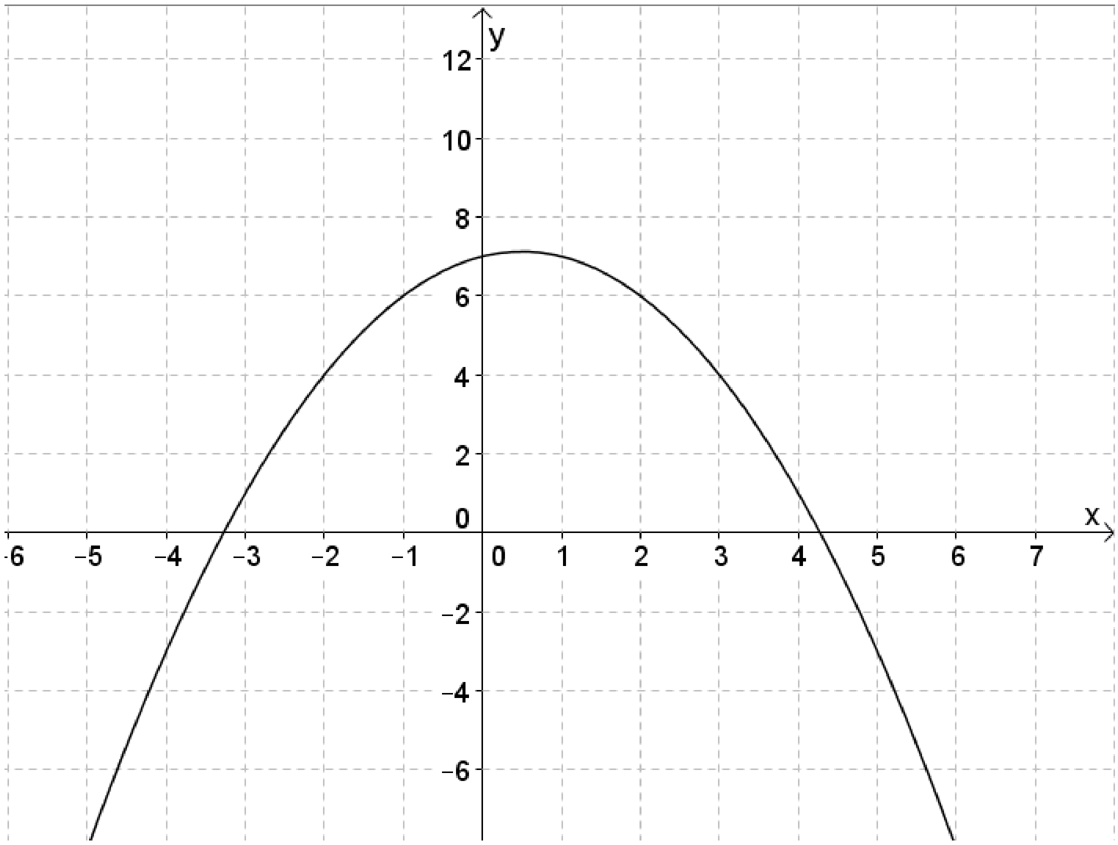
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point H.

5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point K de l'axe des abscisses tel que A, B et K sont alignés.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 7$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La parabole C_f est tracée ci-dessous.



1. a) Le point $A\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$ appartient-il à la parabole C_f ? Justifier la réponse.

b) Vérifier que $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{57}{8}$.

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.

d) Soit a un réel de l'intervalle [-1 ;4].

Déterminer un encadrement de f(a).

2) Soit g la fonction affine définie par $g(-4) = 6$ et $g(6) = -4$.

a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.

c) Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation suivante :

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{8} = 0$$

d) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_f et de la courbe D_g.

CORRECTION

Exercice 1

Remarque : Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme décimale.

Lors d'une course cycliste, 200 coureurs sont engagés.

Dans ce peloton, 15 % des coureurs dont 10 français ont moins de 25 ans.

L'organisation constate que $\frac{4}{5}$ du peloton est formé de coureurs étrangers.

1. Compléter, sans justifier le tableau suivant :

	Moins de 25 ans	25 ans ou plus	Total
Français	10	30	40
Etrangers7,5	20	140	160
Total	30	170	200

5,75

On choisit un coureur au hasard dans le peloton.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants.

A : "le coureur a moins de 25 ans" $p(A) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$	*B* : "le coureur est français" $p(B) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$

3. Calculer la probabilité $p(A\cap B)$ puis en déduire (en rappelant la formule du cours) la probabilité $p(\overline{A\cup B})$.

$p(A \cap B) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$

$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20}\right) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

Vérification : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: étrangers de 25 ans ou plus : d'où $p(\overline{A \cup B}) = \frac{140}{200} = \frac{7}{10}$

4. Traduire par une phrase l'évènement $\overline{A\cap B}$ puis calculer la probabilité $p(\overline{A\cap B})$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: Le coureur a 25 ans ou plus ou est étranger.

$p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

5. On considère l'évènement *C* : "le coureur est un étranger de moins de 25 ans"

a) Exprimer l'évènement *C* en fonction des évènements *A* et B.

$C = A \cap \overline{B}$

b) Calculer la probabilité $p(C)$.

$p(C) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$

CORRECTION

Exercice 2 :

Une boutique vend des jeux vidéo d'occasion.
Le prix unitaire des jeux est fixé de la façon suivante :

- pour un seul jeu acheté, le prix est de 30€ ;
- on applique une réduction de 2€ à ce prix unitaire par jeu supplémentaire acheté.

Ainsi, pour 4 jeux achetés, le prix unitaire est : $30-3\times 2=24$€.
La recette totale est : $4\times 24=96$€.

Soit $R(x)$ la recette, en euros, réalisée lors d'une vente de x jeux achetés, où x est un entier supérieur à 1.

1. Exprimer le prix unitaire de vente en fonction de x.

$P(x) = 30 - (x - 1)\times 2$

2. Montrer que $R(x)=32x-2x^2$.

$R(x) = P(x)\times x = (30 - (x - 1)\times 2)\times x = (30 -2x + 2)\times x = (32 - 2x)\times x = 32x - 2x^2$

3. a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $R(x)=-2(x-8)^2+128$.

$-2(x - 8)^2 + 128 = -2(x^2 - 2\times x\times 8 + 8^2) + 128 = -2(x^2 - 16x + 64) + 128$
$-2(x - 8)^2 + 128 = -2x^2 + 32x - 128 + 128$
$-2(x - 8)^2 + 128 = -2x^2 + 32x = R(x)$

c) En déduire le montant de la recette maximale pour une vente.

La forme canonique de R nous donne l'extremum qui est ici un maximum : 128.
La recette maximale est de 128 € (réalisée pour 8 jeux vidéos achetés)

4. Deux amis souhaitent acheter chacun deux jeux vidéo. Est-il préférable qu'ils payent séparément, ou qu'un seul achète les quatre jeux ?

Séparément : $2\times R(2) = 2\times(32\times 2 - 2\times 2^2) = 2\times(64 - 8) = 2\times 56 = 112$ €
Un seul : $R(4) = 32\times 4 - 2\times 4^2 = 128 - 32 = 96$ €
Or $96 < 112$, il vaut donc mieux qu'un seul achète les quatre jeux.

CORRECTION

Exercice 3 :

1ère partie :

On considère l'algorithme ci-dessous qui vérifie si deux vecteurs $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(c;d)$ sont colinéaires.

```
1.  Liste des variables utilisées
2.      a ; b ; c ; d   :  nombres
3.  Entrées
4.      Demander a, b, c, d
5.  Traitements

6.      Si a*d = b*c Alors
7.          Afficher « colinéaires »
8.      Sinon
9.          Afficher « non colinéaires »
10.     Fin si
```

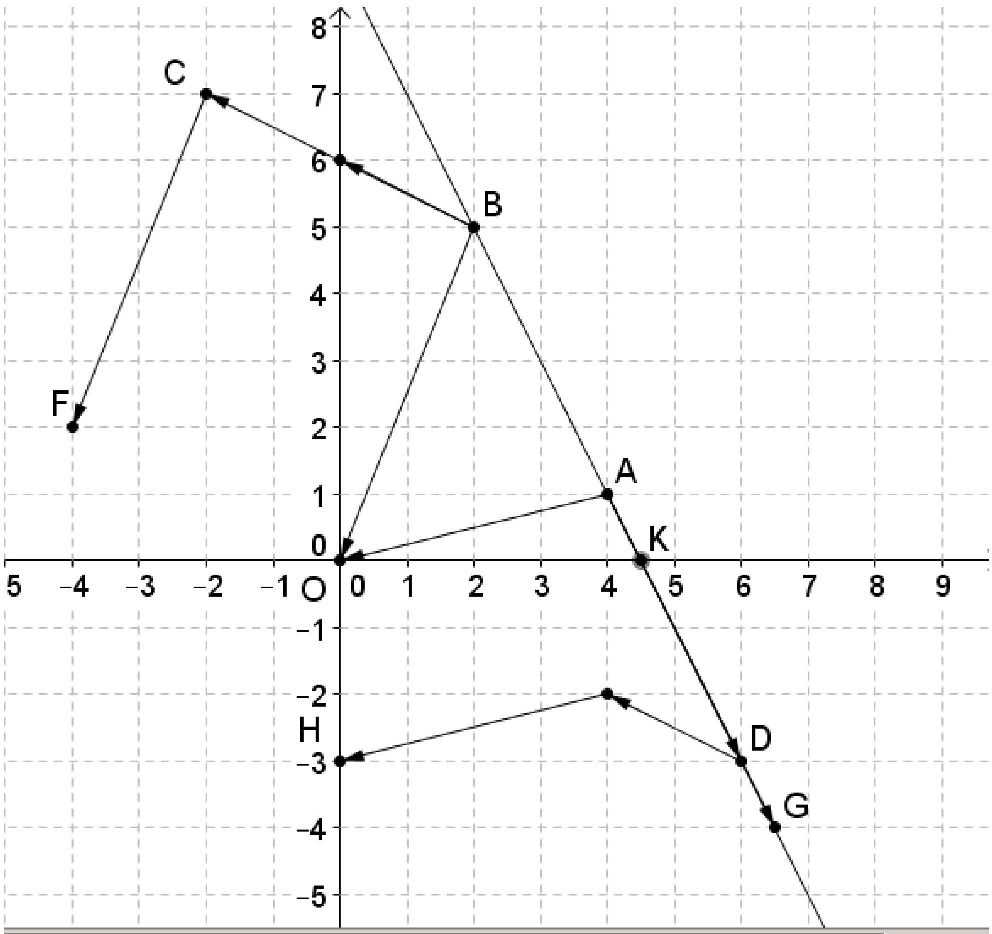
- Compléter la ligne 6

2ème partie :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J) , on considère les points :

A (4 ; 1) B (2 ; 5) C (−2 ; 7) D (6; -3)

1. Placer les points A, B, C et D sur la figure ci-dessous puis la compléter au fur et à mesure de l'exercice.



CORRECTION

2. Montrer que les droites (OD) et (BC) sont parallèles.

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} x_D - x_O \\ y_D - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 7-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$6\times2 - (-3)\times(-4) = 12 - 12 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ; donc les droites (OD) et (BC) sont parallèles.

3. Placer les points F, G et H tels que :

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO}$ $\quad\overrightarrow{AG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$ $\quad\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO}$

4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point H.

$\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} x_H - x_D \\ y_H - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 6 \\ y_H + 3 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_O - x_A \\ y_O - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AO} \iff \begin{cases} x_H - 6 = -6 \\ y_H + 3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_H = -6 + 6 = 0 \\ y_H = -3 \end{cases}$

Les coordonnées du point H sont (0 ;-3).

5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point K de l'axe des abscisses tel que A, B et K sont alignés.

Si K appartient à l'axe des abscisses alors $K(x_K ;0)$.

SI A, B et K sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_K - 4 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_K - 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

La condition de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}$ se traduit par l'équation :

$$-2\times(-1) - 4(x_K - 4) = 0$$

$$\iff 2 - 4x_K + 16 = 0$$

$$\iff -4x_K = -18$$

$$\iff x_K = \frac{-18}{-4} = 4{,}5.$$

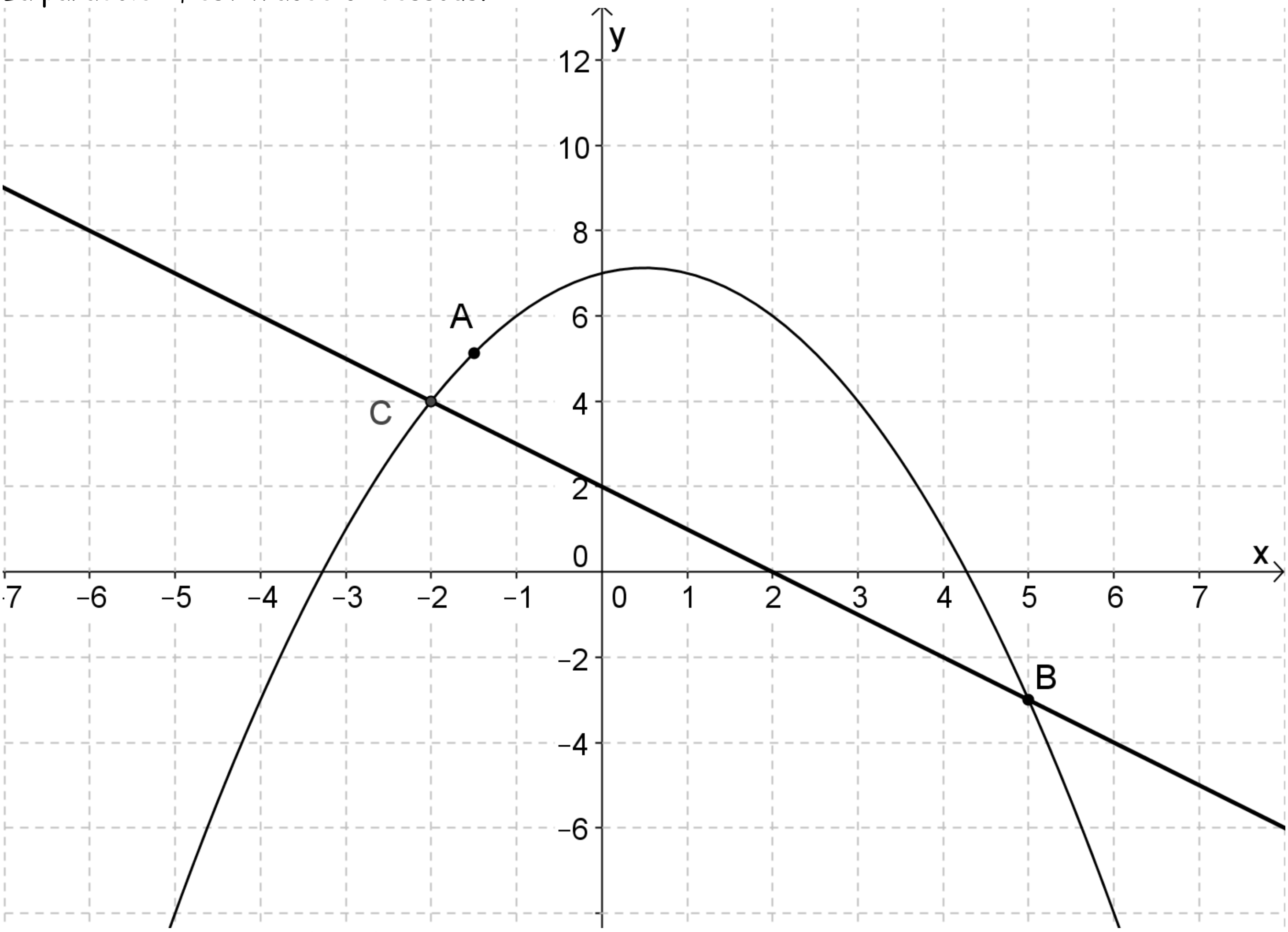
Les coordonnées du point K sont donc (4,5 ;0).

CORRECTION

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} + 7$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La parabole C_f est tracée ci-dessous.



1. a) Le point $A\left(-\frac{3}{2} ; 5\right)$ appartient-il à la parabole C_f ? Justifier la réponse.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right) + 7 = -\frac{1}{2}\times\frac{9}{4} - \frac{3}{4} + 7 = \frac{-9 - 3\times2 + 7\times8}{8} = \frac{41}{8} \neq 5$$

Donc $A \notin C_f$.

b) Vérifier que $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{57}{8}$.

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{57}{8} = -\frac{1}{2}\times\left[x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{57}{8} = -\frac{1}{2}\times\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{57}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{57}{8} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} + \frac{57}{8} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 7 = f(x)$$

CORRECTION

c) Donner le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	57/8	$\searrow$	

d) Soit a un réel de l'intervalle [-1 ;4].
Déterminer un encadrement de f(a).

Sur $\left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$, f est croissante entre f(-1) = $-\frac{1}{2}\times(-1)^2 - \frac{1}{2} + 7 = 6$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{8}$

Sur $\left[\frac{1}{2};4\right]$, f est décroissante entre f(4) = $-\frac{1}{2}\times 16 + 2 + 7 = -8 + 9 = 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{57}{8}$.

Donc si a $\in$[-1 ;4] alors f(a) $\in \left[1;\frac{57}{8}\right]$.

2) Soit g la fonction affine définie par g(-4) = 6 et g(6) = -4.

a) Déterminer l'expression de g en fonction de x.

On a g(x) = ax + b

$a = \frac{g(6) - g(-4)}{6 - (-4)} = \frac{-4 - 6}{10} = -1$

g(x) = -x + b

L'égalité g(6) = -4 se traduit l'équation d'inconnue b : -6 + b = -4

D'où b = -4 + 6 = 2

Donc g(x) = -x + 2

b) Tracer la courbe D_g représentative de la fonction g dans le repère précédent.

c) Montrer que l'équation f(x) = g(x) est équivalente à l'équation suivante :

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{49}{8} = 0$$

f(x) = g(x) $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 7 = -x + 2$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + x + 7 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 5 = 0$

CORRECTION

Or $-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{49}{8}=-\frac{1}{2}\left(x^2-2\times x\times\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)+\frac{49}{8}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}+\frac{49}{8}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+5$

Donc $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{49}{8}=0$

d) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_f et de la courbe D_g.

Les abscisses des points d'intersection de C_f et D_g vérifient l'équation $f(x) = g(x)$

Or $f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{49}{8}=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{49}{8}$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{49}{8}\times(-2)$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$ ou $x-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=5$

$f(-2)=-\frac{1}{2}\times(-2)^2-1+7=-2-1+7=4$

et $f(5)=-\frac{1}{2}\times5^2+\frac{5}{2}+7=\frac{-25+5+14}{2}=-3$

Les points d'intersection de C_f et D_g sont donc B(5 ;-3) et C(-2 ;4).