Introduction

Pour un oui… ou pour un non ? Oui ou non ?

Dans le Manoir de Bletchey Park, quartier général des services de renseignement britanniques, Thomas Flowers (1905 - 1998) a construit pendant la seconde guerre mondiale la machine Colossus, premier calculateur électronique à utiliser le système binaire. Si cette machine n'était pas encore un ordinateur, elle a cassé les codes secrets utilisés par l'armée allemande et a été un élément essentiel dans la victoire alliée. Plusieurs milliers de personnes ont travaillé à Bletchey Park, en particulier Alan Turing.

Les fonctions booléennes sont utilisées partout : dans les langages de programmation, en architecture des ordinateurs, dans certains algorithmes cryptographiques…

Elles peuvent être décrites par des tables ou de manière symbolique et nous montrons comment passer d'une représentation à une autre.

Nous nous concentrons dans ce chapitre sur les fonctions **non**, **ou** et **et** qui permettent d'exprimer toutes les autres.

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, aux *fonctions booléennes*, qui associent un booléen, 0 ou 1, à un ou plusieurs booléen(s).

Les fonctions non, et, ou

Les fonctions **non**, **et** et **ou** sont définies par les tables ci-contre.

Le nom de ces fonctions vient de la convention de lire 0 comme « faux » et 1 comme « vrai ».

x	non(x)
0	1
1	0

x	y	et(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	ou(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

On remarquera que, quand *x* et *y* sont tous les deux égaux à 1, ***x ou y*** est égal à 1.

Ce *ou* est donc **inclusif** ; c'est le *ou* qui apparaît dans la phrase « Je viendrai s'il y a un bus ou un métro. » et non le *ou exclusif* qui apparaît dans la phrase « Tu dois choisir : aller à la mer ou aller à la montagne. »

Pour le distinguer du précédent, ce ***ou exclusif*** sera noté ***oux***.

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non, et, ou

On peut exprimer de manière symbolique toutes les fonctions booléennes avec les seules fonctions **non**, **et** et **ou**.

Avant de voir comment le faire dans le cas général, on commence par exprimer quatre fonctions particulières, qui seront utilisées dans la suite.

La fonction **multiplexeur** : mux(x,y,z)

- Si x = 0 alors mux(x,y,z) = y
- Si x = 1 alors mux(x,y,z) = z

x	y	z	mux(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Montrons que mux(x,y,z) = (*non*(*x*) *et y*) *ou* (*x et z*).

x	y	z	non(x)	non(x) et y	x et z	(non(x) et y) ou (x et z)
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non, et, ou

- la fonction **constante égale à 0** exprimée, de manière symbolique, par h(x) = x et non(x),
- la fonction **constante égale à 1** exprimée par k(x) = x ou non(x),
- l' « **identité** » exprimée par i(x) = x

x	h(x)
0	0
1	0

x	k(x)
0	1
1	1

x	i(x)
0	0
1	1

Ces quatre fonctions peuvent être exprimées avec des fonctions **non**, **et** et **ou**.

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non, et, ou

Montrons par récurrence sur n que toutes les fonctions de $\{0;1\}^n$ sur $\{0;1\}$ peuvent s'exprimer avec les fonctions **non**, **et** et **ou**.

- Dans le cas n = 1, la fonction à exprimer est l'une des fonctions h, k, i et non, qui peuvent toutes s'exprimer avec les fonctions **non**, **et** et **ou**.
- On suppose maintenant que l'on sait exprimer toutes les fonctions de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ avec les fonctions **non**, **et** et **ou**.

On se donne une fonction f de $\{0,1\}^{n+1}$ dans $\{0,1\}$.

On définit les fonctions g et g' de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$ par :

$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1,\ldots, x_n,0)$ et $g'(x_1,\ldots, x_n) = f(x_1,\ldots, x_n,1)$

et on remarque que la fonction f peut s'exprimer de manière symbolique avec les fonctions g, g' et mux :

$f(x_1,\ldots, x_n, x_{n+1}) = mux(x_{n+1}, g(x_1,\ldots, x_n), g'(x_1,\ldots, x_n))$

Par hypothèse de récurrence, on sait exprimer les deux fonctions g et g' de manière symbolique avec les fonctions **non**, **et** et **ou**, et comme on sait aussi exprimer la fonction **mux**, on peut exprimer la fonction f en remplaçant les fonctions **mux**, g et g' par leur expression en termes de **non**, **et** et **ou**.

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non, et, ou

SAVOIR-FAIRE Trouver une expression symbolique exprimant une fonction à partir de sa table

On identifie le nombre d'arguments de la fonction f.

On extrait de la table de la fonction f les tables des fonctions g et g' définies par :

$g(x1, …, xn) = f(x1,…, xn,0)$

$g'(x1,…, xn) = f(x1,…, xn,1)$

On trouve les expressions symboliques de ces deux fonctions et on construit celle de la fonction f à partir de ces deux expressions symboliques et de celle de la fonction multiplexeur.

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non, et, ou

Exercice 1

Trouver une expression symbolique exprimant une fonction ou exclusif (oux) définie par la table ci-contre.

x	y	x oux y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercice 2

Trouver l'expression symbolique de la fonction de « si et seulement si » définie par la table ci-contre.

x	y	x ssi y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non et ou

On veut maintenant montrer qu'il est possible de se passer de la fonction **et** et que toutes les fonctions booléennes peuvent s'exprimer avec les fonctions **non** et **ou**.

Pour cela, il suffit de montrer que la fonction **et** elle-même peut s'exprimer ainsi.

Cette fonction s'exprime de la manière suivante :

- x et y = non (non(x) ou non(y))

L'expression des fonctions booléennes avec les fonctions non et ou

<u>Exercice 3</u>

Montrer que :

x ou y = non (non(x) et non(y))

En déduire que toutes les fonctions booléennes peuvent s'exprimer avec les fonctions **non** et **et**.