Exercice 1 : bases de numération (5 points)

1) Ecrire en décimal le nombre binaire 110011.
2) Ecrire en binaire le nombre décimal 1964.
3) Convertir en décimal le nombre 7123 écrit en base 8.
4) Convertir en base 5 le nombre décimal 2048.
5) Un **repunit** binaire est un nombre binaire qui ne comporte que le chiffre 1.
   Un nombre de Mersenne est un entier naturel qui s'écrit sous la forme $2^n - 1$ avec n entier naturel.
   Montrer que tout repunit binaire est un nombre de Mersenne (en base 10).

Exercice 2 : La représentation des entiers relatifs (4 points)

On considère dans cet exercice la notation en complément à 2 sur un octet.

1) Donner la plage de représentation possible des entiers sous la forme d'un intervalle.
2) Dans cette notation, trouver la représentation en binaire des nombres suivants :
   115 et -115.
3) Effectuer en binaire, en posant l'opération en ligne l'opération 115 + (-115)
   Et montrer que le résultat en binaire correspond bien au résultat attendu en décimal.

Exercice 3 : la représentation des nombres à virgule (1 point)

Expliquer comment sont représentés les nombres à virgule.

Exercices 4, 5 et 6 : Programmes sur repl.it (10 points)

Sur ton compte Repl.it, résoudre les exercices nommés :

- Année bissextile;
- Somme des carrés des entiers impairs;
- Nombre parfait.

<u>Exercice 1</u> : bases de numération (5 points)

1) Ecrire en décimal le nombre binaire 101101.
2) Ecrire en binaire le nombre décimal 1918.
3) Convertir en base 8 le nombre décimal 2018.
4) Convertir en décimal le nombre 4321 écrit en base 5.
5) Un **repunit** décimal est un nombre décimal qui ne comporte que le chiffre 1.
   Donner l'écriture d'un repunit décimal de taille n à l'aide d'une puissance de 10.

<u>Exercice 2</u> : La représentation des entiers relatifs (4 points)

On considère dans cet exercice la notation en complément à 2 sur un octet.

1) Donner la plage de représentation possible des entiers sous la forme d'un intervalle.
2) Dans cette notation, trouver la représentation en binaire des nombres suivants :
   107 et -57.
3) Effectuer en binaire, en posant l'opération en ligne l'opération 107 + (-57)
   Et montrer que le résultat en binaire correspond bien au résultat attendu en décimal.

<u>Exercice 3</u> : la représentation des nombres à virgule (1 point)

Expliquer comment sont représentés les nombres à virgule.

<u>Exercices 4, 5 et 6</u> : Programmes sur repl.it (10 points)

Sur ton compte Repl.it, résoudre les exercices nommés :

- Année bissextile;
- Somme des carrés des entiers impairs;
- Nombre parfait.

CORRECTION

Exercice 1 : bases de numération (5 points)

1) Ecrire en décimal le nombre binaire 110011.
2) Ecrire en binaire le nombre décimal 1964.
3) Convertir en décimal le nombre 7123 écrit en base 8.
4) Convertir en base 5 le nombre décimal 2048.
5) Un **repunit** binaire est un nombre binaire qui ne comporte que le chiffre 1.
   Un nombre de Mersenne est un entier naturel qui s'écrit sous la forme $2^n - 1$ avec n entier naturel.
   Montrer que tout repunit binaire est un nombre de Mersenne (en base 10).

1) 110011 en base 2 = $1\times2^0 + 1\times2^1 + 0\times2^2 + 0\times2^3 + 1\times2^4 + 1\times2^5 = 1 + 2 + 0 + 0 + 16 + 32 = 51$ en base 10.
2) $1964 = 2\times982 \quad + 0$
   $982 = 2\times491 \quad + 0$
   $491 = 2\times245 \quad + 1$
   $245 = 2\times122 \quad + 1$
   $122 = 2\times61 \quad + 0$
   $61 = 2\times30 \quad + 1$
   $30 = 2\times15 \quad + 0$
   $15 = 2\times7 \quad + 1$
   $7 = 2\times3 \quad + 1$
   $3 = 2\times1 \quad + 1$
   $1 = 2\times0 \quad + 1$
   Donc 1964 est égal à 111 1010 1100 en base 2.
   Vérification :
   $2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 4 + 8 + 32 + 128 + 256 + 512 + 1024 = 1964$
3) 7123 en base 8 = $3\times8^0 + 2\times8^1 + 1\times8^3 + 7\times8^4 = 3 + 16 + 512 + 28\,672 = 29\,203$
4) $2048 = 5\times409 \quad + 3$
   $409 = 5\times81 \quad + 4$
   $81 = 5\times16 \quad + 1$
   $16 = 5\times3 \quad + 1$
   $3 = 5\times0 \quad + 3$
   Donc 2048 en base 10 = 31143 en base 5.

Vérification :
$3\times5^0 + 4\times5^1 + 1\times5^2 + 1\times5^3 + 3\times5^4 = 3 + 20 + 25 + 125 + 1\,875 = 2\,048$

5) Soit 111....1111 un repunit binaire avec n digits égaux à 1.
111...1111 en base 2 = $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots\ldots 2^{n-1}$.
Il s'agit de la somme des termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme égal à 1 :
$$1 + 2^1 + 2^2 + \ldots\ldots 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$
Donc un repunit binaire est bien un nombre de Mersenne.

<u>Exercice 2</u> : La représentation des entiers relatifs (4 points)

On considère dans cet exercice la notation en complément à 2 sur un octet.

1) Donner la plage de représentation possible des entiers sous la forme d'un intervalle.
2) Dans cette notation, trouver la représentation en binaire des nombres suivants :
115 et -115.
3) Effectuer en binaire, en posant l'opération en ligne l'opération 115 + (-115)
Et montrer que le résultat en binaire correspond bien au résultat attendu en décimal.

1) La plage de représentation es $[-2^{8-1};2^{8-1}-1] = [-128;127]$
2) $115 = 2\times57 \quad + 1$
$57 = 2\times28 \quad + 1$
$28 = 2\times14 \quad + 0$
$14 = 2\times7 \quad + 0$
$17 = 2\times3 \quad + 1$
$3 = 2\times1 \quad + 1$
$1 = 2\times0 \quad + 1$
Donc 115 en décimal = 0111 0011 en complément à deux sur un octet.
Vérification : 1 + 2 + 16 + 32 + 64 = 115

-115 est représenté par $-115 + 2^8 = -115 + 256 = 141$

$141 = 2\times70 + 1$
$70 = 2\times35 + 0$

CORRECTION

$35 = 2\times17 + 1$
$17 = 2\times8 + 1$
$8 = 2\times4 + 0$
$4 = 2\times2 + 0$
$2 = 1\times2 + 0$
$1 = 0\times1 + 1$

Donc 141 est représenté sur 8 bits par : 1000 1101
Vérification : 1 + 4 + 8 + 128 = 141
Donc -115 est représenté en complément à 2 sur un octet par 1000 1101.

<u>Autre méthode</u> : on inverse bit à bit 0111 0011 : ce qui donne 1000 1100 et on ajoute 1 : on obtient alors 1000 1101

3) 115 + (-115) en binaire se pose :

$$\begin{array}{rr} & 0111\ 0011 \\ + & 1000\ 1101 \\ \hline & 1\ 0000\ 0000 \end{array}$$

En omettant le bit de dépassement, on trouve 0000 0000 = 0.
On retrouve bien que 115 + (-115) = 0

CORRECTION

<u>Exercice 3</u> : la représentation des nombres à virgule (1 point)

Expliquer comment sont représenté les nombres à virgule.

On utilise une représentation similaire à la « notation scientifique » des calculatrices, sauf qu'elle est en base deux et non en base dix.
Un nombre est représenté sous la forme **s m 2^n** où **s est le signe du nombre, n son exposant et m sa mantisse**.
Le signe est + ou –, l'exposant est un entier relatif et la mantisse est un nombre à virgule, compris entre 1 inclus et 2 exclu.

Par exemple, quand on utilise 64 bits pour représenter un nombre à virgule, on utilise 1 bit pour le signe, 11 bits pour l'exposant et 52 bits pour la mantisse.

Le signe + est représenté par 0 et le signe – par 1. L'exposant n est un entier relatif compris entre –1024 et 1023, on le représente comme l'entier naturel n + 1023, qui est compris entre 1 et 2046. Les deux entiers naturels 0 et 2047 sont réservés pour des situations exceptionnelles (+∞, –∞, NaN). La mantisse m est un nombre binaire à virgule compris entre 1 inclus et 2 exclu, comprenant 52 chiffres après la virgule. Comme cette mantisse est comprise entre 1 et 2, elle a toujours un seul chiffre avant la virgule et ce chiffre est toujours un 1, il est donc inutile de le représenter et on utilise les 52 bits pour représenter les 52 chiffres après la virgule.

<u>Exemple</u> :
Soit le mot sur 64 bits suivant :
110001000110100100111100001110000000000000000000000000000000
0000

Le signe est représenté par 1.

L'exposant est représenté par 10001000110.

La mantisse est représentée par
1001001111000011100000000000000000000000000000000000.

Le signe du nombre est –.

Le nombre 10001000110 est égal à 1094 et l'exposant du nombre est donc n = 1094 – 1023 = 71.

Sa mantisse est :

m = 1.1001001111000011100000000000000000000000000000000000

$= 1 + 1/2 + 1/2^4 + 1/2^7 + 1/2^8 + 1/2^9 + 1/2^{10} + 1/2^{11} + 1/2^{12} + 1/2^{17}$

$= (2^{17} + 2^{16} + 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^2 + 2 + 1) / 2^{17}$

$= \frac{206727}{131072}$.

Le nombre représenté est donc $-206727/131072 \times 2^{71} \approx -3.724\ldots \times 10^{21}$.

Exercices 4, 5 et 6 : Programmes sur repl.it (10 points)

Sur ton compte Repl.it, résoudre les exercices nommés :

- Année bissextile;
- Somme des carrés des entiers impairs;
- Nombre parfait.

- Année bissextile;

```
annee = int(input("Saisir l'année : "))
if (annee % 4 == 0 and annee % 100 != 0) or annee % 400 ==0:
  print(annee, "est une année bissextile")
else:
  print(annee, "n'est pas une année bissextile")
```

- Somme des carrés des entiers impairs

```
n = int(input("Saisir l'entier n : "))
somme = 0
i = 1
while i <= 2*n-1:
  somme = somme + i*i
  i = i + 2
print(somme,int(n*(4*n*n-1)/3))
```

CORRECTION

- Nombre parfait.

Question a)

```
n = int(input("Saisir l'entier à tester : "))
somme = 0
for i in range(1,n+1):
  if n % i == 0:
    somme = somme + i
if somme == 2*n:
  print(n,"est un nombre parfait.")
else:
  print(n,"n'est pas un nombre parfait.")
```

Question b)

```
for n in range(1,1001):
  somme = 0
  for i in range(1,n+1):
    if n % i == 0:
      somme = somme + i
  if somme == 2*n:
    print(n,"est un nombre parfait.")
```

CORRECTION

Exercice 1 : bases de numération (5 points)

6) Ecrire en décimal le nombre binaire 101101.
7) Ecrire en binaire le nombre décimal 1918.
8) Convertir en base 8 le nombre décimal 2018.
9) Convertir en décimal le nombre 4321 écrit en base 5.
10) Un **repunit** décimal est un nombre décimal qui ne comporte que le chiffre 1.
Donner l'écriture d'un repunit décimal de taille n à l'aide d'une puissance de 10.

1) $101101 = 1\times2^0 + 0\times2^1 + 1\times2^2 + 1\times2^3 + 0\times2^4 + 1\times2^5 = 1 + 0 + 4 + 8 + 32 = 45$

2)

$1918 = 2\times959 \quad + 0$
$982 = 2\times479 \quad + 1$
$479 = 2\times239 \quad + 1$
$239 = 2\times119 \quad + 1$
$119 = 2\times59 \quad + 1$
$59 = 2\times29 \quad + 1$
$29 = 2\times14 \quad + 1$
$14 = 2\times7 \quad + 0$
$7 = 2\times3 \quad + 1$
$3 = 2\times1 \quad + 1$
$1 = 2\times0 \quad + 1$

Donc 1918 est représenté par : 111 0111 1110

Vérification :
$0\times2^0 + 1\times2^1 + 1\times2^2 + 1\times2^3 + 1\times2^4 + 1\times2^5 + 1\times2^6 + 0\times2^7 + 1\times2^8 + 1\times2^9 + 1\times2^{10}$
$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 256 + 512 + 1\,024 = 1\,918$

3)

$2018 = 8\times252 \quad + 2$
$252 = 8\times31 \quad + 4$
$31 = 8\times3 \quad + 7$
$3 = 8\times0 \quad + 3$

Donc 2018 en base 10 = 3742 en base 8.

Vérification : $2\times8^0 + 4\times8^1 + 7\times8^2 + 3\times8^3 = 2 + 32 + 448 + 1\,536 = 2\,018$

4) 4321 en base 5 = $1\times5^0 + 2\times5^1 + 3\times5^2 + 4\times5^3 = 1 + 10 + 75 + 500 = 586$

CORRECTION

5) 1111....111 avec n chiffres 1 en base 10 = $10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^{n-1}$.
On reconnait la somme des termes de la suite géométrique de raison 10 et de premier terme égal à 1.

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + ... + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

CORRECTION

Exercice 2 : La représentation des entiers relatifs (4 points)

On considère dans cet exercice la notation en complément à 2 sur un octet.

1) Donner la plage de représentation possible des entiers sous la forme d'un intervalle.
2) Dans cette notation, trouver la représentation en binaire des nombres suivants :
   107 et -57.
3) Effectuer en binaire, en posant l'opération en ligne l'opération 107 + (-57)
   Et montrer que le résultat en binaire correspond bien au résultat attendu en décimal.

1) La plage de représentation es $[-2^{8-1};2^{8-1}-1] = [-128;127]$
2)
   $107 = 2\times53 + 1$
   $53 = 2\times26 + 1$
   $26 = 2\times13 + 0$
   $13 = 2\times6 + 1$
   $6 = 2\times3 + 0$
   $3 = 2\times1 + 1$
   $1 = 2\times0 + 1$
   Donc 107 en décimal = 0110 1011 en complément à deux sur un octet.
   Vérification : 1 + 2 + 8 + 32 + 64 = 107

   -57 est représenté par $-57 + 2^8 = -57 + 256 = 199$

   $199 = 2\times99 + 1$
   $99 = 2\times49 + 1$
   $49 = 2\times24 + 1$
   $24 = 2\times12 + 0$
   $12 = 2\times6 + 0$
   $6 = 2\times3 + 0$
   $3 = 2\times1 + 1$
   $1 = 0\times1 + 1$

Donc 199 est représenté sur 8 bits par : 1100 0111
Vérification : 1 + 2 + 4 + 64 + 128 = 199
Donc -57 est représenté en complément à 2 sur un octet par 1100 0111.
3) 107 + (-57) en binaire se pose :

0110 1011

CORRECTION

+ 1100 0111

1 0011 0010

En omettant le bit de dépassement, on trouve 0011 0010 = 2 + 16 +32 =50

On retrouve bien que 107 + (-57) = 50

CORRECTION

Exercice 3 : la représentation des nombres à virgule (1 point)

Expliquer comment sont représenté les nombres à virgule.

On utilise une représentation similaire à la « notation scientifique » des calculatrices, sauf qu'elle est en base deux et non en base dix.
Un nombre est représenté sous la forme **s m 2^n** où **s est le signe du nombre, n son exposant et m sa mantisse**.
Le signe est + ou −, l'exposant est un entier relatif et la mantisse est un nombre à virgule, compris entre 1 inclus et 2 exclu.

Par exemple, quand on utilise 64 bits pour représenter un nombre à virgule, on utilise 1 bit pour le signe, 11 bits pour l'exposant et 52 bits pour la mantisse.

Le signe + est représenté par 0 et le signe − par 1. L'exposant n est un entier relatif compris entre −1024 et 1023, on le représente comme l'entier naturel n + 1023, qui est compris entre 1 et 2046. Les deux entiers naturels 0 et 2047 sont réservés pour des situations exceptionnelles (+∞, −∞, NaN). La mantisse m est un nombre binaire à virgule compris entre 1 inclus et 2 exclu, comprenant 52 chiffres après la virgule. Comme cette mantisse est comprise entre 1 et 2, elle a toujours un seul chiffre avant la virgule et ce chiffre est toujours un 1, il est donc inutile de le représenter et on utilise les 52 bits pour représenter les 52 chiffres après la virgule.

<u>Exemple</u> :
Soit le mot sur 64 bits suivant :
11000100011010010011110000111000000000000000000000000000000000
00

Le signe est représenté par 1.

L'exposant est représenté par 10001000110.

La mantisse est représentée par
1001001111000011100000000000000000000000000000000000.

Le signe du nombre est −.

Le nombre 10001000110 est égal à 1094 et l'exposant du nombre est donc n = 1094 – 1023 = 71.

Sa mantisse est :

m = 1.1001001111000011100000000000000000000000000000000000

$= 1 + 1/2 + 1/2^4 + 1/2^7 + 1/2^8 + 1/2^9 + 1/2^{10} + 1/2^{11} + 1/2^{12} + 1/2^{17}$

$= (2^{17} + 2^{16} + 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^2 + 2 + 1) / 2^{17}$

$= \frac{206727}{131072}$.

Le nombre représenté est donc $-206727/131072 \times 2^{71} \approx -3.724\ldots \times 10^{21}$.