Exercice 1

3 dés cubiques sont placés dans une urne/

Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6.

Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, et les trois autres sont numérotées 1.

On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.

On note A l'événement "les deux dés tirés sont normaux".

On note B l'événement "les deux faces supérieures sont numérotées 6 ".

1) a) Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.
   b) Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.
2) a) Calculer $P_A(B)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis de $P(B \cap A)$.
   b) Calculer P(B).
3) Calculer $P_B(A)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

Exercice 2 : Formule de Bayes

1) A et B sont deux événements de probabilité non nulle.
   Démontrer la relation suivante appelée "formule de Bayes" :
$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$
2) **Application**
   On dispose de 100 dés cubiques, dont 25 exactement sont truqués.
   Un dé truqué amène le 6 avec une probabilité de 0,5.
   On choisit au hasard un dé dans le lot de 100, on le lance et le 6 apparait.
   Quelle est la probabilité que le dé choisi soit truqué.

Exercice 3 : Probabilités et suites

Marion débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie.

On admet que, lorsqu'elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,6, alors que, si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,7.

Pour n entier naturel non nul, on note :

- l'événement G_n : "Marion gagne la n-ième partie";
- l'événement P_n : "Marion perd la n-ième partie".

1) Préciser les valeurs des probabilités de G_1 et de P_1.
2) Calculer la probabilité de G_2 et en déduire celle de P_2.

   Pour un entier naturel n non nul, on pose :

   $$x_n = P(G_n) \text{ et } y_n = P(P_n).$$
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

   $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n$ et $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n$.
4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

   $$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n.$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est constante.
   b) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
   c) Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, l'expression de x_n en fonction de n.

      Etudier la convergence de la suite (x_n).

Exercice 4 : Loi de probabilité et espérance

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, trois boules d'une urne contenant cinq boules rouges et cinq boules vertes.

Si le joueur obtient trois boules rouges, événement que l'on note R_3, il gagne 50 €.

S'il obtient deux boules rouges et une boule verte, événement que l'on note R_2, il gagne 30 € .

Enfin, s'il obtient strictement moins de deux boules rouges, il ne gagne rien ; on note cet événement E.

1) Démontrer que les probabilités des événements R_2 et R_3 sont :

$$p(R_2) = \frac{5}{12} \text{ et } p(R_3) = \frac{1}{12}$$

CORRECTION

Exercice 1

1) a) $\overline{A}$: Le dé anormal a été tiré.

b) $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

2) a) $P_A(B) = \frac{1}{36}$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$

b) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{36} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{108} + \frac{1}{18} = \frac{7}{108}$

3) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{108} \times \frac{108}{7} = \frac{1}{7}$

Exercice 2 : Formule de Bayes

1) On a $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

D'autre part $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

On a aussi $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$

Remarque : la formule des probabilités totales permet d'obtenir le dernier résultat.

Finalement, on obtient la formule de Bayes :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

2) On appelle T l'événement "le dé est truqué".

On appelle S l'événement "la face sortie est un 6".

Selon l'énoncé, on peut déterminer les probabilités suivantes :

$P(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(\overline{T}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Sachant que le dé est truqué, la probabilité que le 6 apparaisse est $\frac{1}{2}$:

Donc : $P_T(S) = \frac{1}{2}$

Sachant que le dé est non truqué, la probabilité que le 6 apparaisse est $\frac{1}{6}$:

$P_{\overline{T}}(S) = \frac{1}{6}$

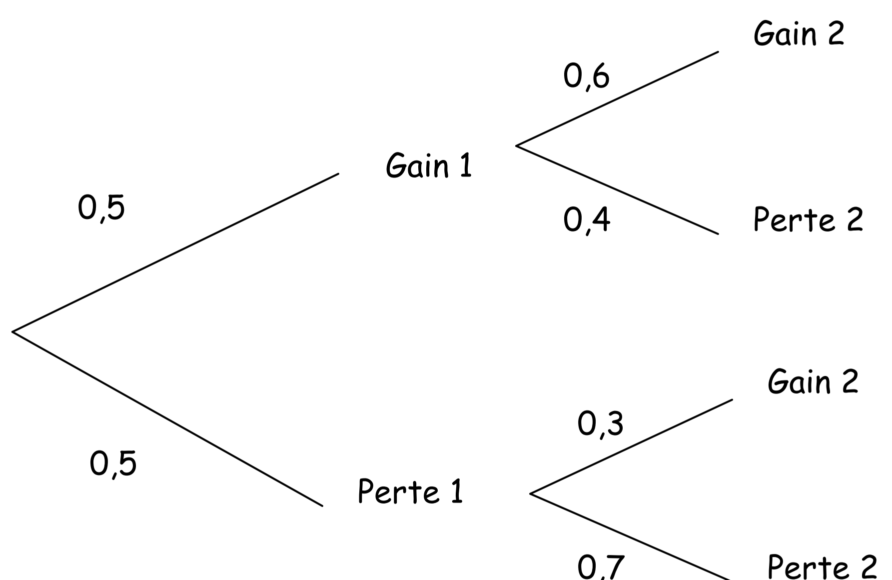
En utilisant la formule de Bayes, on a donc :

$$P_S(T) = \frac{P_T(S) \times P(T)}{P_T(S) \times P(T) + P_{\overline{T}}(S) \times P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{2} = \frac{1}{2}$$

Sachant que le six est sorti, la probabilité que le dé soit truqué est donc de $\frac{1}{2}$.

<u>Exercice 3</u> : Probabilités et suites

1) $P(G_1) = 0{,}5$ et $P(P_1) = 0{,}5$.
2) On a : $P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap P_1)$
   Ou encore : $P(G_2) = P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{P_1}(G_2) \times P(P_1)$ (formule des probabilités totales)
   D'où : $P(G_2) = 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}5 \times 0{,}9 = 0{,}45$
   et : $P(P_2) = 1 - P(G_2) = 0{,}55$
   On peut aussi utiliser un arbre :



3) On a $P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap P_n)$

Soit $x_{n+1} = P_{G_n}(G_{n+1})\times P(G_n) + P_{P_n}(G_{n+1})\times P(P_n)$ (Formule des probabilités totale)

D'où : $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n$

D'autre part, $P(P_{n+1}) = P(P_{n+1} \cap P_n) + P(P_{n+1} \cap G_n)$

Soit $y_{n+1} = P_{P_n}(P_{n+1})\times P(P_n) + P_{G_n}(P_{n+1})\times P(G_n)$ (Formule des probabilités totale)

D'où : $y_{n+1} = 0,7y_n + 0,4x_n$

4) a) On a :

$x_{n+1} + y_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n + 0,4x_n + 0,7y_n = x_n + y_n = ... = x_1 + y_1 = 1$

Donc $v_n = 1$ (la suite (v_n) est constante)

b) $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1} = 4(0,6x_n + 0,3y_n) - 3(0,4x_n + 0,7y_n)$

$w_{n+1} = (2,4 - 1,2)x_n + (1,2 - 2,1)y_n$

$w_{n+1} = 1,2x_n - 0,9y_n$

$w_{n+1} = 0,3(4x_n - 3y_n) = 0,3w_n$

Donc (w_n) est la suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 4\times0,5 - 3\times0,5 = 0,5$

On en déduit que : $w_n = 0,5\times0,3^{n-1}$

c) Du système :

$$\begin{cases} x_n + y_n = 1 \\ 4x_n - 3y_n = w_n \end{cases}$$

on déduit que :

$3x_n + 4x_n = 3 + w_n$ (on multiplie par trois les deux membres de la première équation et on additionne les deux équations membre à membre.)

D'où : $x_n = \dfrac{3 + w_n}{7} = \dfrac{3 + 0,5\times0,3^{n-1}}{7} = \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{14}\times0,3^{n-1}$

$x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{14}\times(0,3^n - 0,3^{n-1}) < 0$ car $0 < 0,3 < 1$.

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^{n-1} = 0$ car $0 < 0,3 < 1$

La suite (x_n) converge donc vers $\dfrac{3}{7}$.

De même on montre que la suite (y_n) est croissante est converge vers $\dfrac{4}{7}$.

CORRECTION

Exercice 4 : Loi de probabilité et espérance

1) Le nombre de tirages possibles est $\binom{10}{3} = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$

Le nombre d'issues qui réalisent l'événement R_2 est : $\binom{5}{2}\times\binom{5}{1} = \dfrac{5\times4}{2}\times5 = 50$

Donc $p(R_2) = \dfrac{\binom{5}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$

De même $p(R_3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$

2) La loi de probabilité de X est la suivante :

Probabilité de ne rien gagner : $1 - \dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2}$

X	0	30	50
p(X)	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{12}$

$E(X) = 0\times\dfrac{1}{2} + 30\times\dfrac{5}{12} + 50\times\dfrac{1}{12} = \dfrac{150+50}{12} = \dfrac{200}{12} = \dfrac{50}{3}$