Exercice 1 : suites adjacentes

On rappelle que $n! = n(n-1)\times\ldots\times2\times1$ lorsque $n \neq 0$.

1) Prouver que les suites (u_n) et (v_n) définies pour n non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

et :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

2) Calculer u_7 et v_7 et en déduire une valeur approchée de la limite commune l de (u_n) et (v_n) à 10^{-3} près.

3) Prouver que la limite commune l des suites (u_n) et (v_n) n'est pas un nombre rationnel.

Aide : On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $l = \frac{p}{q}$ (avec p et q entiers non nuls) et utiliser l'encadrement $u_q < l < v_q$.

Note : Cette limite l est un nombre remarquable, noté e.

CORRECTION

Exercice 1 : suites adjacentes

1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$

Pour $n > 1$, $v_{n+1} - v_n < 0$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \frac{1}{n!}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} = 0$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) A l'aide de la calculatrice ou avec un tableur, on obtient facilement :

n	u(n)	v(n)
1	2	3
2	2,5	3
3	2,66666667	2,83333333
4	2,70833333	2,75
5	2,71666667	2,725
6	2,71805556	2,71944444
7	2,71825397	2,71845238

Une valeur approchée de l à 10^{-3} près est : 2,718.

3) Supposons l rationnel, alors ils existent des entiers non nuls p et q tels que :

$l = \frac{p}{q}$.

On a alors $u_q < l < v_q$

Soit : $u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q!}$.

En multipliant par $q!$, on obtient :

CORRECTION

$q! \times u_q < p(q-1)! < q!u_q + 1$

Or $q!u_q = q! + (q-1)! + (q-2)! + 1$

Donc $q!u_q$ est un entier.

$p(q-1)!$ est aussi un entier.

Or $q!u_q$ et $q!u_q + 1$ sont deux entiers consécutifs.

Il n'est donc possible qu'un entier soit strictement compris entre ces deux entiers consécutifs.

Donc l est irrationnel.