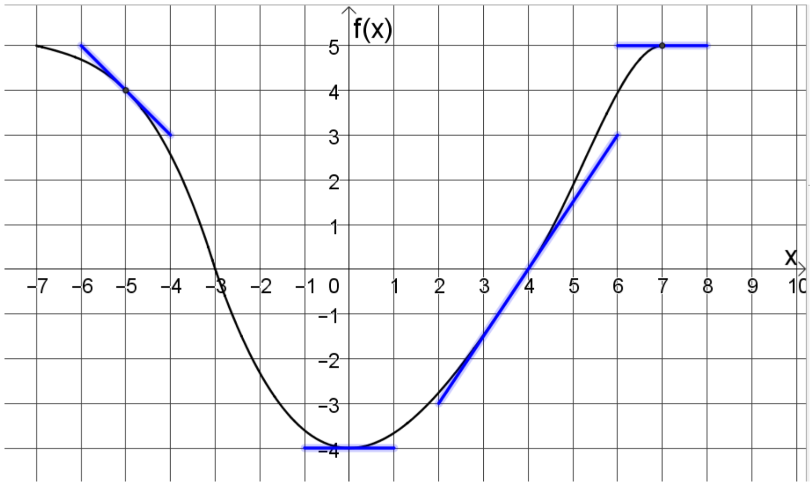
Exercice 1 : (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-7;7] et quelques une de ses tangentes.



1) Par lecture graphique, donner les valeurs de f(-5), f(4), f'(-5) et f'(4).
2) Résoudre sur l'intervalle [-7;7] les équations f(x) = 0 et f'(x) = 0.
3) Résoudre sur l'intervalle [-7;7] les inéquations f(x) > 0 et f'(x) > 0.

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur [-2;3] par $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [-2;3].
   On dressera le tableau de variations de f sur [-2;3] en indiquant les valeurs exactes des extrema.
2) En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-2;3].

Exercice 3 : (5 points)

Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 1500 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation C, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{4}$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 26 euros et le litre de gasoil coûte 2 euros.

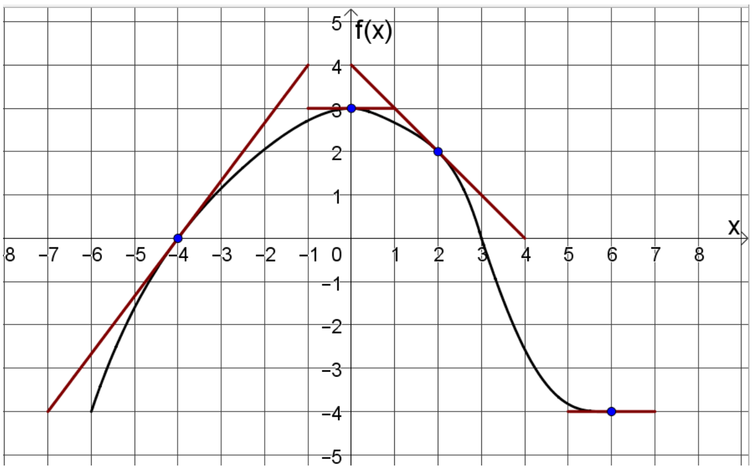
a) Montrer que le prix de revient P du voyage peut s'exprimer en euros sous la forme :

$$P(v) = \frac{48\,000}{v} + 7{,}5v$$

b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du trajet ?
Donner alors le prix de revient minimal correspondant et la durée du trajet.

Exercice 1 : (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-6; 6] et quelques une de ses tangentes.



1) Par lecture graphique, donner les valeurs de f(-4), f(2), f'(-4) et f'(2).
2) Résoudre sur l'intervalle [-6; 6] les équations f(x) = 0 et f'(x) = 0.
3) Résoudre sur l'intervalle [-6; 6] les inéquations f(x) < 0 et f'(x) < 0.

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur [-2;1] par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [-2;1].
   On dressera le tableau de variations de f sur [-2;1] en indiquant les valeurs exactes des extrema.
2) En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-2;1].

Exercice 3 : (5 points)

Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 2000 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation C, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{230}{v} + \frac{v}{5}$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 21 euros et le litre de gasoil coûte 2 euros.

a) Montrer que le prix de revient P du voyage peut s'exprimer en euros sous la forme :

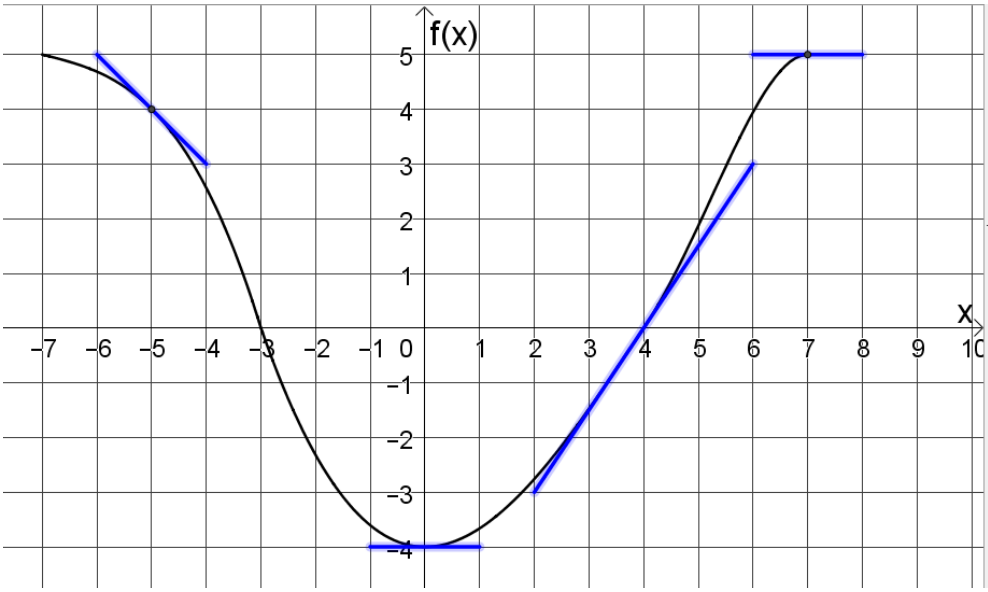
$$P(v) = \frac{51\,200}{v} + 8v$$

b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du trajet ?
   Donner alors le prix de revient minimal correspondant et la durée du trajet.

CORRECTION

<u>Exercice 1</u> : (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-7;7] et quelques une de ses tangentes.



1) Par lecture graphique, donner les valeurs de f(-5), f(4), f'(-5) et f'(4).
2) Résoudre sur l'intervalle [-7;7] les équations f(x) = 0 et f'(x) = 0.
3) Résoudre sur l'intervalle [-7;7] les inéquations f(x) > 0 et f'(x) > 0.

1) f(-5) = 4 et f(4) = 0.
   f'(-5) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -5.
   f'(-5) = -1
   f'(4) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.
   $f'(4) = \frac{3}{2}$
2) f(x) = 0 ⇔ x = -3 ou x = 4
   Les solutions de l'équation f'(x) = 0 sont les abscisses des points de la courbe correspondants aux extrema de f.
   f'(x) = 0 ⇔ x = 0 ou x = 7
3) f(x) > 0 ⇔ $x \in [-7;3[\cup]4;7]$.
   f'(x) > 0 correspond aux intervalles sur lesquels la fonction f est croissante.
   f'(x) > 0 ⇔ $x \in]0;7[$.

CORRECTION

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur [-2;3] par $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

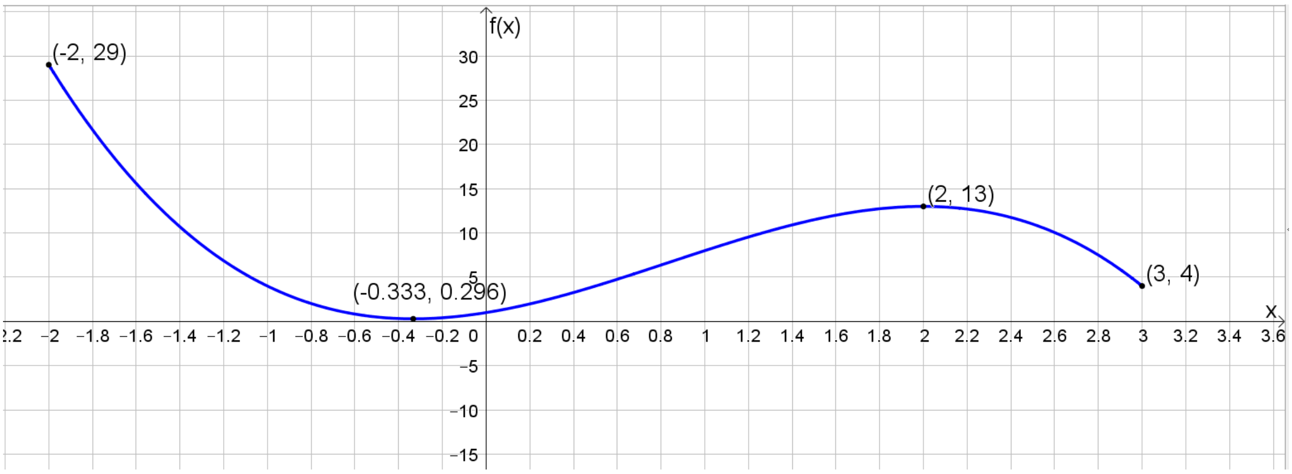
1) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [-2;3].
   On dressera le tableau de variations de f sur [-2;3] en indiquant les valeurs exactes des extrema.
2) En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-2;3].

1) Etudier les variations de f revient à étudier le signe de sa dérivée.
   f en tant que fonction polynôme est dérivable sur [-2;3].
   $f'(x) = -2\times3x^2 + 5\times2x + 4 = -6x^2 + 10x + 4 = 2(-3x^2 + 5x + 2)$
   Le discriminant de l'équation $-3x^2 + 5x + 2 = 0$ est :
   $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4\times(-3)\times2 = 25 + 24 = 49 = 7^2$
   Comme $\Delta > 0$, l'équation $-6x^2 - 10x + 4 = 0$ admet deux solutions distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{2\times(-3)} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{-6} = 2$
   Comme $a = -3 < 0$, alors $-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$ si $x \in \left[-\dfrac{1}{3}\,;2\right]$.
   Donc f est décroissante sur $\left[-2;-\dfrac{1}{3}\right]$, croissante sur $\left[-\dfrac{1}{3}\,;2\right]$ et décroissante sur [2;3].
   De plus, $f(-2) = -2\times(-2)^3 + 5\times(-2)^2 + 4\times(-2) + 1 = -2\times(-8) + 5\times4 - 8 + 1$
   $f(-2) = 16 + 20 - 7 = 16 + 13 = 29$
   $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 + 5\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 1 = -2\times\dfrac{-1}{27} + 5\times\dfrac{1}{9} - \dfrac{4}{3} + 1$
   $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{27} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{2 + 5\times3 - 4\times9 + 27}{27} = \dfrac{2 + 15 - 36 + 27}{27} = \dfrac{8}{27} \approx 0{,}296$
   $f(2) = -2\times2^3 + 5\times2^2 + 4\times2 + 1 = -2\times8 + 5\times4 + 8 + 1 = -16 + 20 + 9 = 13$
   $f(3) = -2\times3^3 + 5\times3^2 + 4\times3 + 1 = -2\times27 + 5\times9 + 12 + 1 = -54 + 45 + 13 = 4$
   On en déduit le tableau de variations suivant de la fonction f sur [-2;3] :

x	-2		-1/3		2		3
f'		-		+		-	
f(x)	29	↘	8/27	↗	13	↘	4

CORRECTION

2) Sur l'intervalle [-2;3], le minimum de f est $\frac{8}{27}$ et le maximum est 29.



<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 1500 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation C, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{4}$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 26 euros et le litre de gasoil coûte 2 euros.

a) Montrer que le prix de revient P du voyage peut s'exprimer en euros sous la forme :

$$P(v) = \frac{48\,000}{v} + 7{,}5v$$

b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du trajet ?
Donner alors le prix de revient minimal correspondant et la durée du trajet.

a) La durée du trajet de 1500 km à la vitesse v, est $t = \frac{1500}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc $26 \times \frac{1500}{v} = \frac{39\,000}{v}$.

La consommation en litres pour 1500 km (1500 = 15 × 100) sera de :

$15 \times C(v) = 15 \times \left(\frac{300}{v} + \frac{v}{4}\right)$.

Et comme le litre coûte 2 €, alors le coût du carburant sera de :

CORRECTION

$2\times15\times\left(\frac{300}{v}+\frac{v}{4}\right)=\frac{9\ 000}{v}+7{,}5v$

Le prix de revient est alors $P(v)=\frac{39\ 000}{v}+\frac{9\ 000}{v}+7{,}5v=\frac{48\ 000}{v}+7{,}5v$.

b) Pour minimiser le prix de revient du trajet, il faut étudier les variations de la fonction P.

Etudier les variations de la fonction P revient à étudier le signe de sa dérivée.

P est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$P'(x)=-\frac{48\ 000}{v^2}+7{,}5$

$P'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{48\ 000}{v^2}+7{,}5=0$

$\Leftrightarrow\quad v^2=\frac{48\ 000}{7{,}5}=6\ 400=80^2$

$\Leftrightarrow\quad v=-80$ ou $v=80$

Seule la solution positive 80 convient ici.

On en déduit le tableau des variations suivant de la fonction P sur $]0;+\infty[$:

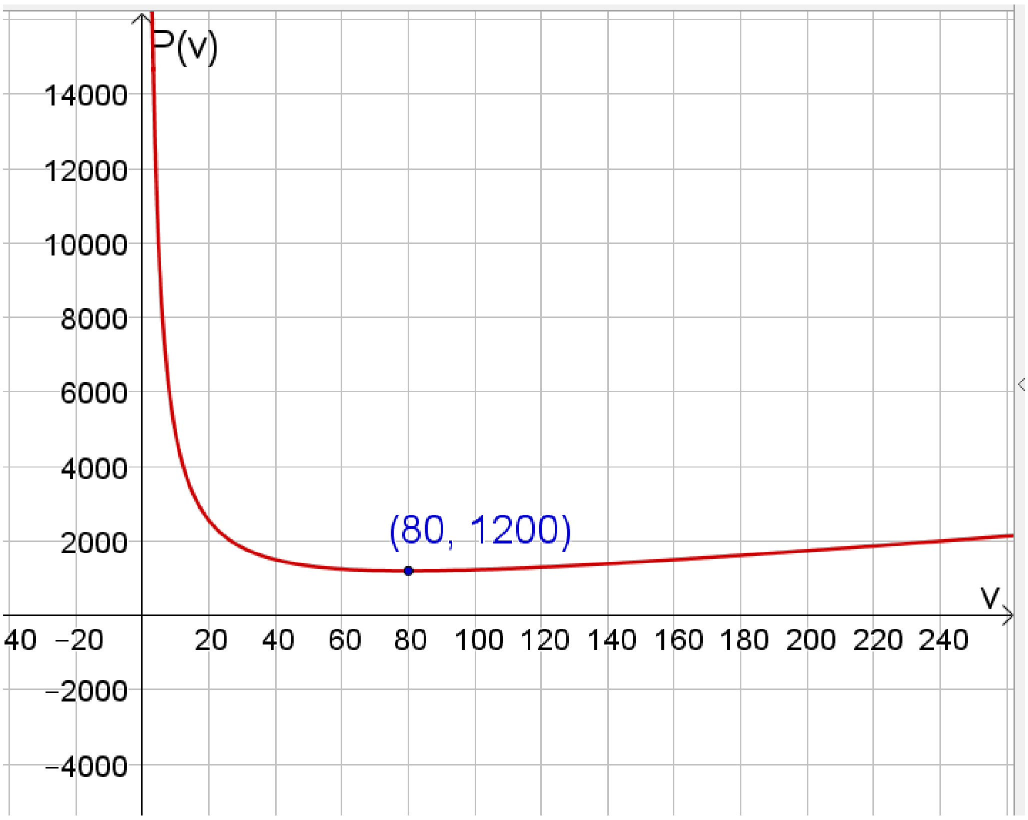
v	0		80		$+\infty$
P'		-		+	
P(v)		↘	m	↗	

$m=P(80)=\frac{48\ 000}{80}+7{,}5\times80=600+600=1\ 200$

<u>Conclusion</u> : Pour minimiser les coûts, la vitesse moyenne doit être 80 km/h et le prix de revient minimal est alors 1 200 €.

La durée du trajet est alors de : $\frac{1\ 500}{v}=\frac{1\ 500}{80}=18{,}75$ h = 18 h et 45 min

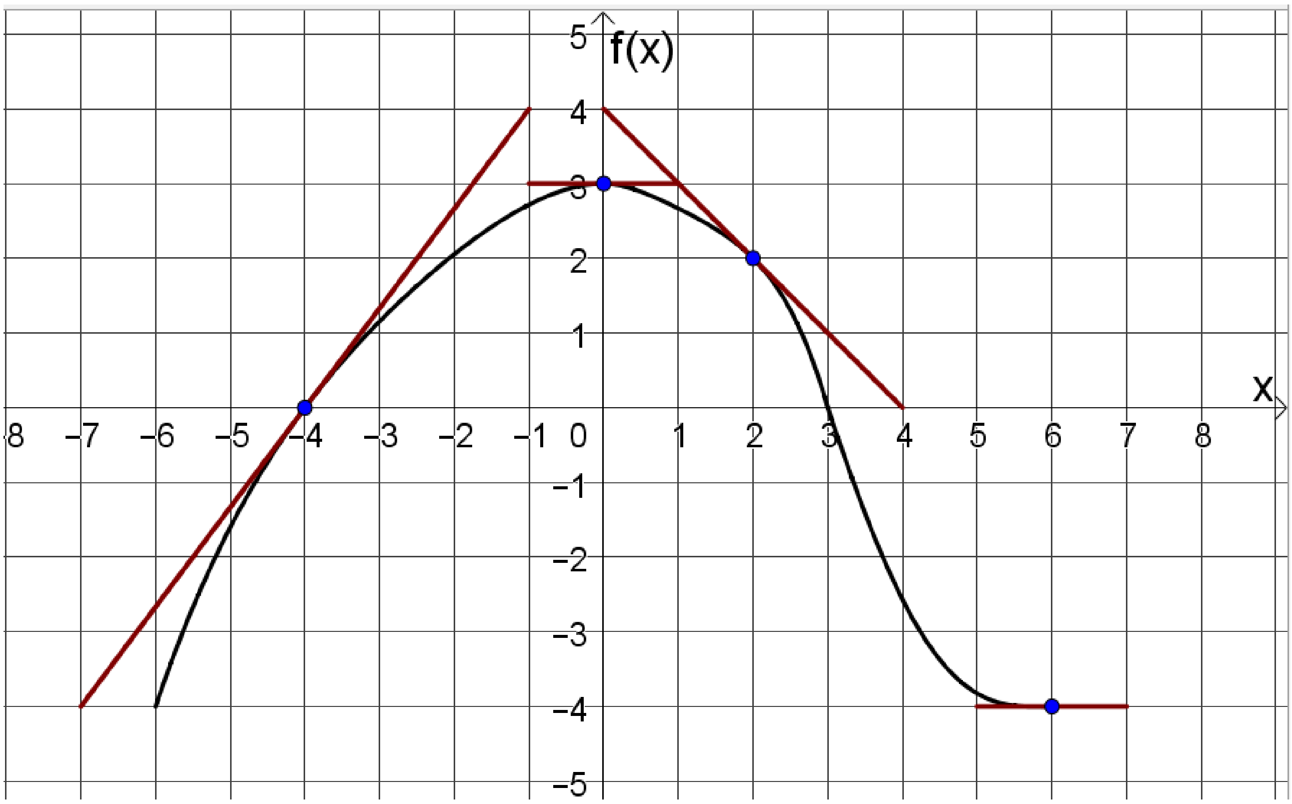
CORRECTION


P(v)
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
(80, 1200)
v
40
−20
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220
240
−2000
−4000

CORRECTION

<u>Exercice 1</u> : (8 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-6; 6] et quelques une de ses tangentes.



1) Par lecture graphique, donner les valeurs de f(-4), f(2), f'(-4) et f'(2).
2) Résoudre sur l'intervalle [-6; 6] les équations f(x) = 0 et f'(x) = 0.
3) Résoudre sur l'intervalle [-6; 6] les inéquations f(x) < 0 et f'(x) < 0.

1) f(-4) = 0 et f(2) = 2.

f'(-4) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -4.

$f'(-4) = \frac{4}{3}$

f'(2) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

f'(2) = -1

2) f(x) = 0 ⇔ x = -4 ou x = 3

Les solutions de l'équation f'(x) = 0 sont les abscisses des points de la courbe correspondants aux extrema de f.

f'(x) = 0 ⇔ x = 0 ou x = 6

3) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-6;-4[\cup]3;6]$.

$f'(x) < 0$ correspond aux intervalles sur lesquels la fonction f est décroissante.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0;6[$.

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur [-2;1] par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$

1) Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [-2;1].
   On dressera le tableau de variations de f sur [-2;1] en indiquant les valeurs exactes des extrema.
2) En déduire le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-2;1].

1) Etudier les variations de f revient à étudier le signe de sa dérivée.
f en tant que fonction polynôme est dérivable sur [-2;1].
$f'(x) = 2\times3x^2 + 2x - 4 = 6x^2 + 2x - 4 = 2(3x^2 + x - 2)$
Le discriminant de l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times3\times(-2) = 1 + 24 = 25 = 5^2$
Comme $\Delta > 0$, l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2\times3} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{6} = \frac{2}{3}$$

Comme $a = 3 > 0$, alors $3x^2 + x - 2 \leq 0$ si $x \in \left[-1\,;\frac{2}{3}\right]$.

Donc f est croissante sur [-2; -1], décroissante sur $\left[-1\,;\frac{2}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2}{3};1\right]$.

De plus, $f(-2) = 2\times(-2)^3 + (-2)^2 - 4\times(-2) + 1 = -2\times8 + 4 + 8 + 1 = -16 + 13 = -3$
$f(-1) = 2\times(-1)^3 + (-1)^2 - 4\times(-1) + 1 = -2 + 1 + 4 + 1 = 4$

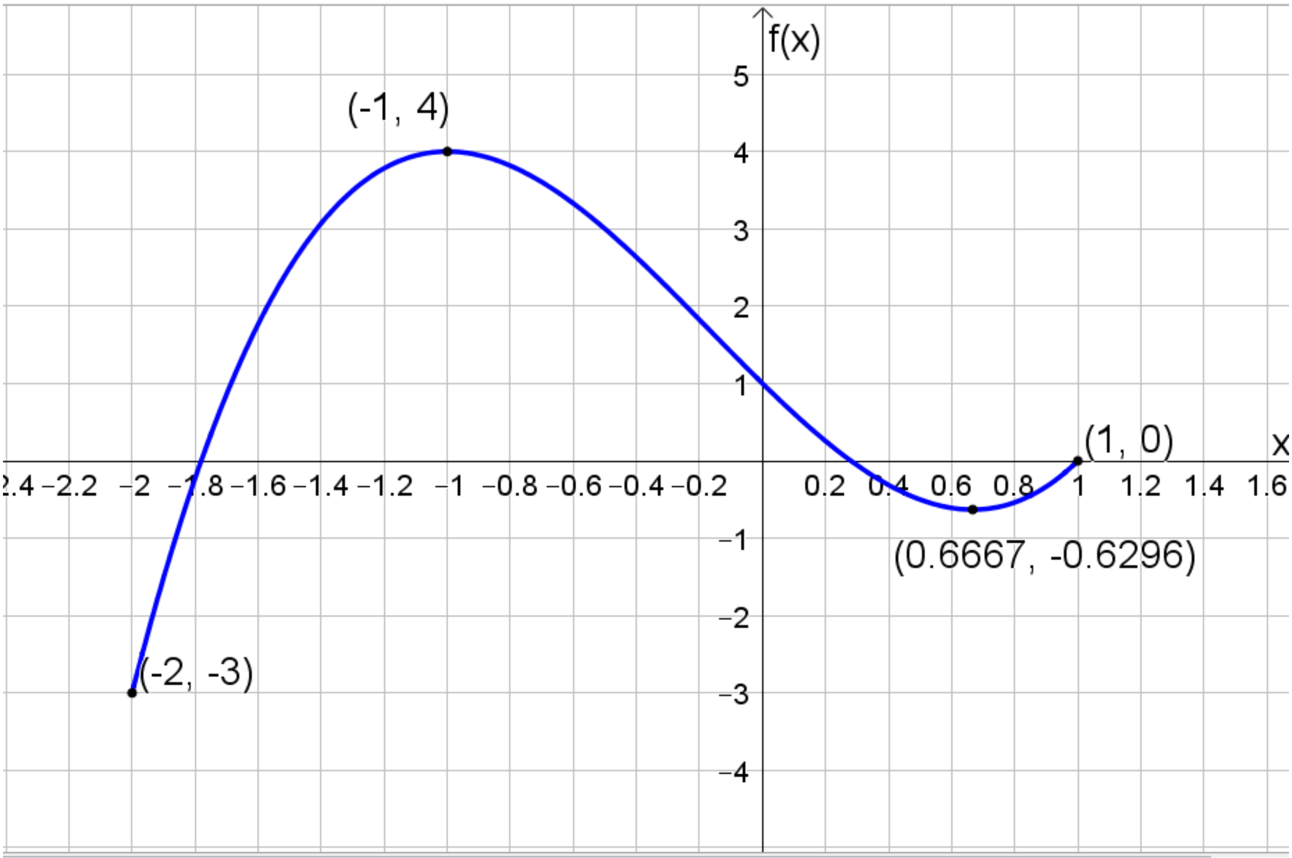
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\times\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = 2\times\frac{8}{27} + \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{16 + 4\times3 - 8\times9 + 27}{27}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16 + 12 - 72 + 27}{27} = -\frac{17}{27}$$

$f(1) = 2\times1^3 + 1^2 - 4\times1 + 1 = 2 + 1 - 4 + 1 = 0$
On en déduit le tableau de variations suivant de la fonction f sur [-2;1] :

x	-2		-1		2/3		1
f'		+		-		+	
f(x)	-3	↗	4	↘	-17/27	↗	0

3) Sur l'intervalle [-2;1], le minimum de f est -3 et le maximum est 4.



<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 2000 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation C, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{230}{v} + \frac{v}{5}$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 21 euros et le litre de gasoil coûte 2 euros.

b) Montrer que le prix de revient P du voyage peut s'exprimer en euros sous la forme :

$$P(v) = \frac{51\,200}{v} + 8v$$

b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du trajet ?
Donner alors le prix de revient minimal correspondant et la durée du trajet.

CORRECTION

a) La durée du trajet de 2000 km à la vitesse v, est $t = \dfrac{2000}{v}$.

Le salaire du chauffeur sera donc $21 \times \dfrac{2000}{v} = \dfrac{42\,000}{v}$.

La consommation en litres pour 2000 km ($2000 = 20 \times 100$) sera de :

$$20 \times C(v) = 20 \times \left(\frac{230}{v} + \frac{v}{5}\right).$$

Et comme le litre coûte 2 €, alors le coût du carburant sera de :

$$2 \times 20 \times \left(\frac{230}{v} + \frac{v}{5}\right) = \frac{9\,200}{v} + 8v$$

Le prix de revient est alors $P(v) = \dfrac{42\,000}{v} + \dfrac{9\,200}{v} + 8v = \dfrac{51\,200}{v} + 8v$.

b) Pour minimiser le prix de revient du trajet, il faut étudier les variations de la fonction P.

Etudier les variations de la fonction P revient à étudier le signe de sa dérivée.

P est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$P'(x) = -\frac{51\,200}{v} + 8$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{51\,200}{v^2} + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow v^2 = \frac{51\,200}{8} = 6\,400 = 80^2$$

$$\Leftrightarrow v = -80 \text{ ou } v = 80$$

Seule la solution positive 80 convient ici.

On en déduit le tableau des variations suivant de la fonction P sur $]0;+\infty[$:

v	0		80		$+\infty$
P'		-		+	
P(v)		↘	m	↗	

$$m = P(80) = \frac{51\,200}{80} + 8 \times 80 = 640 + 640 = 1\,280$$

<u>Conclusion</u> : Pour minimiser les coûts, la vitesse moyenne doit être 80 km/h et le prix de revient minimal est alors 1 280 €.

CORRECTION

La durée du trajet est alors de : $\frac{2\,000}{v} = \frac{2\,000}{80} = 25$ h.