Exercice 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

1) Calculer $f(-1)$ et $f(-1 + h)$.
2) Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$ en utilisant le taux de variation de la fonction f entre -1 et -1 + h.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 2 de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.

Exercice 3 : (8 points)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions données.

1) $f(x) = 4x^3$
2) $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3x^2$
3) $h(x) = (3x + 1)\times(2x - 1)$
4) $i(x) = -\dfrac{4}{x}$
5) $j(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

Exercice 4 : directeur financier (4 points)

Le directeur financier d'une société a chargé un de ses services de déterminer le niveau de production de l'entreprise en comparant le prix de vente et le coût marginal.

Les données sont les suivantes :

- le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par : $C(x) = x^3 - 24x^2 + 90x + 950$, où x désigne la quantité de produit fabriqué en kg, x est compris entre 0 et 20;
- le prix de vente d'un kilogramme de produit est de 45 €.

1) Déterminer le coût marginal $C'(x)$ en fonction de x.
2) L'entreprise produit tant que le coût marginal de production est inférieur au prix de vente unitaire.
   Déterminer le niveau de production de l'entreprise.

Exercice 1 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x$.

1) Calculer $g(2)$ et $g(2 + h)$.
2) Montrer que g est dérivable en 2 et calculer $g'(2)$ en utilisant le taux de variation de la fonction g entre 2 et 2 + h.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 1 de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.

Exercice 3 : (8 points)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions données.

1) $f(x) = 5x^4$
2) $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{x}$
3) $h(x) = (2 - 3x)(5x + 2)$
4) $i(x) = \dfrac{3}{x}$
5) $j(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

Exercice 4 : directeur financier (4 points)

Le directeur financier d'une société a chargé un de ses services de déterminer le niveau de production de l'entreprise en comparant le prix de vente et le coût marginal.

Les données sont les suivantes :

- le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par :
  $C(x) = x^3 - 24x^2 + 80x + 950$, où x désigne la quantité de produit fabriqué en kg, x est compris entre 0 et 20;
- le prix de vente d'un kilogramme de produit est de 35 €.

1) Déterminer le coût marginal $C'(x)$ en fonction de x.
2) L'entreprise produit tant que le coût marginal de production est inférieur au prix de vente unitaire.
   Déterminer le niveau de production de l'entreprise.

CORRECTION

Exercice 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - x$.

3) Calculer $f(-1)$ et $f(-1 + h)$.
4) Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$ en utilisant le taux de variation de la fonction f entre -1 et -1 + h.

1) $f(-1) = (-1)^2 - (-1)) = 1 + 1 = 2$

   $f(-1 + h) = (-1 + h)^2 - (-1 + h) = (-1)^2 - 2\times h + h^2 + 1 - h = h^2 - 3h + 2$

2) On calcule le rapport : $\dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dfrac{h^2 - 3h + 2 - 2}{h} = \dfrac{h^2 - 3h}{h} = h - 3$

   Or $\lim\limits_{h \to 0} h - 3 = -3$

   Donc f est bien dérivable en -1 et $f'(-1) = -3$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2$.

1) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 2 de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.

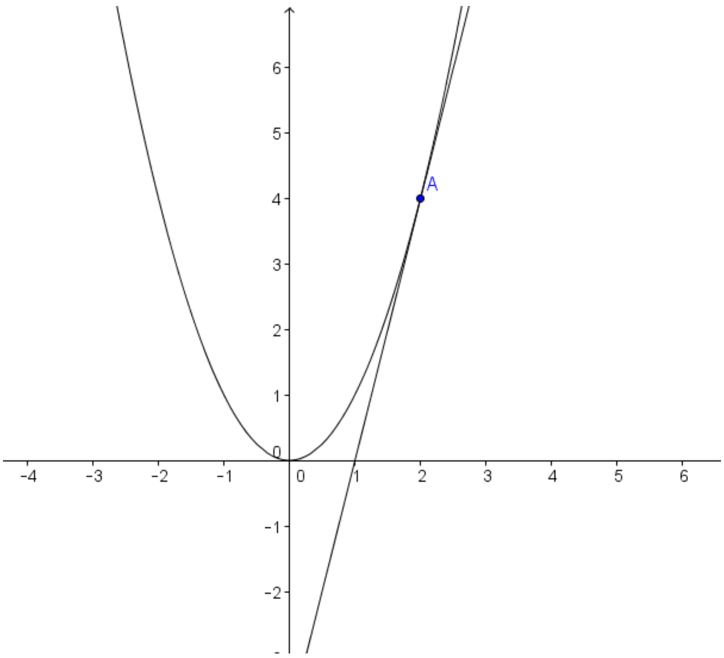
1) Une équation de T est de la forme $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

   Or $f'(x) = 2x$; donc $f'(2) = 4$. $f(2) = 2^2 = 4$

   Une équation de T est donc : $y = 4(x - 2) + 4$

   Soit : $y = 4x - 8 + 4$; soit $y = 4x - 4$

2)



CORRECTION

Exercice 3 : (8 points)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions données.

1) $f(x) = 4x^3$
2) $g(x) = \frac{1}{x} - 3x^2$
3) $h(x) = 3x \times (2x - 1)$
4) $i(x) = -\frac{4}{x}$
5) $j(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

1) $f'(x) = 4 \times 3 \times x^2 = 12x^2$
2) $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 3 \times 2x = -\frac{1}{x^2} - 6x$
3) $h(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 2x - 1$
   $h'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
   Or, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$
   Donc $h'(x) = 3(2x - 1) + (3x + 1) \times 2 = 6x - 3 + 6x + 2 = 12x - 1$
   Autre méthode :
   On développe $h(x)$ en utilisant la double distributivité :
   $h(x) = (3x + 1)(2x - 1) = 3x \times 2x - 3x \times 1 + 1 \times 2x - 1 \times 1 = 6x^2 - x - 1$
   Et $h'(x) = 6 \times 2x - 1 = 12x - 1$
4) $i(x) = -4 \times \frac{1}{x}$; donc $i'(x) = -4 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$
5) $j(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x - 1$
   Remarque : j est définie pour $x \neq 1$.
   $j'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
   Or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$
   Donc $j'(x) = \frac{2 \times (x - 1) - (2x + 1) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{-3}{(x - 1)^2}$

CORRECTION

Exercice 4 : directeur financier (4 points)

Le directeur financier d'une société a chargé un de ses services de déterminer le niveau de production de l'entreprise en comparant le prix de vente et le coût marginal.

Les données sont les suivantes :

- le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par :
  $C(x) = x^3 - 24x^2 + 90x + 950$, où x désigne la quantité de produit fabriqué en kg, x est compris entre 0 et 20;
- le prix de vente d'un kilogramme de produit est de 45 €.

1) Déterminer le coût marginal $C'(x)$ en fonction de x.
2) L'entreprise produit tant que le coût marginal de production est inférieur au prix de vente unitaire.
   Déterminer le niveau de production de l'entreprise.

1) $C'(x) = 3x^2 - 24\times2x + 90 = 3x^2 - 48x + 90$
2) Il faut résoudre l'inéquation $C'(x) < 45$

$$\begin{aligned} C'(x) < 45 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 48x + 90 < 45 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 48x + 90 - 45 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 48x + 45 < 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation du second degré associée $3x^2 - 48x + 45 = 0$

est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4\times3\times45 = 2\,304 - 540 = 1\,764 = 42^2$

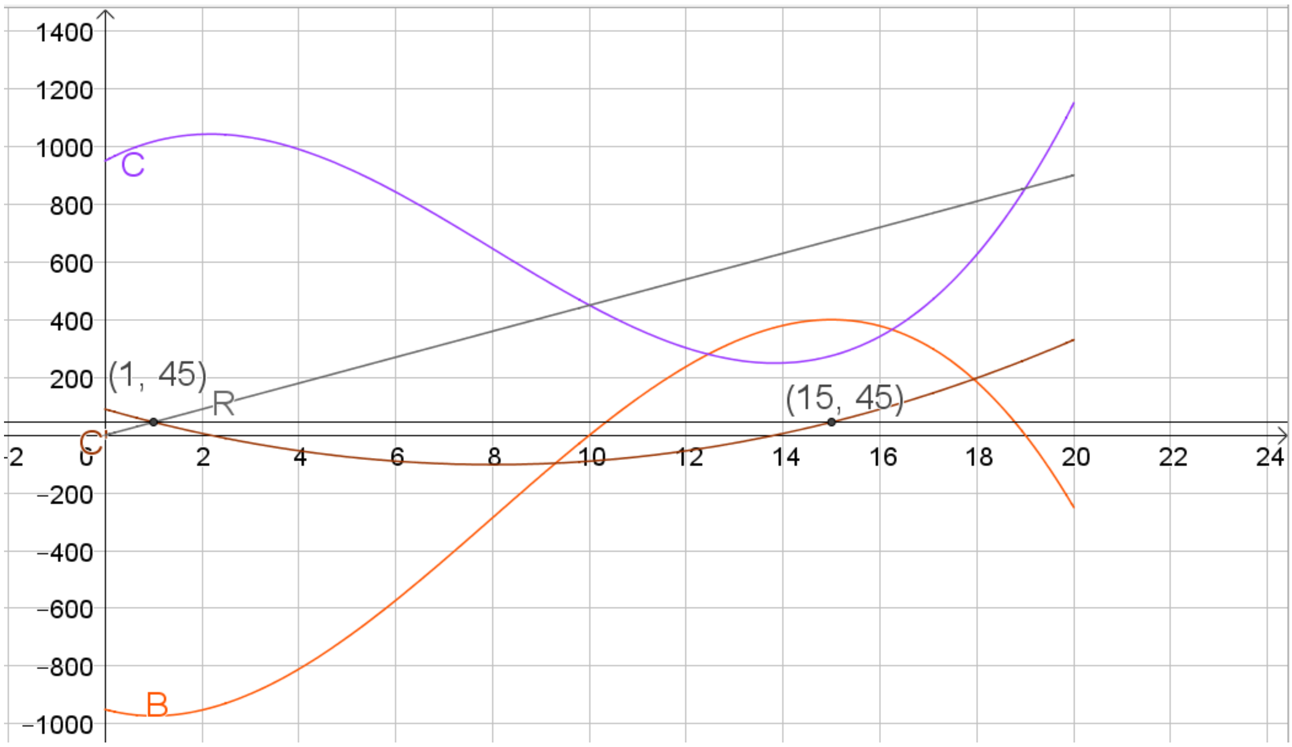
Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{48-42}{6} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{48+42}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

Comme $a = 3 > 0$, $3x^2 - 48x + 48 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1;15[$.

L'entreprise doit donc produire entre 1 et 15 kg pour respecter la condition du coût marginal inférieur au prix de vente unitaire.

CORRECTION



1400
1200
1000
800
600
400
200
-200
-400
-600
-800
-1000
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
C
(1, 45)
R
C
(15, 45)
B

CORRECTION

Exercice 1 : (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x$.

1) Calculer $g(2)$ et $g(2 + h)$.
2) Montrer que g est dérivable en 2 et calculer $g'(2)$ en utilisant le taux de variation de la fonction g entre 2 et 2 + h.

1) $g(2) = -2^2 + 2\times 2 = -4 + 4 = 0$

$g(2 + h) = -(2 + h)^2 + 2\times(2 + h) = -(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h$

$g(2 + h) = -4 - 4h - h^2 + 4 + 2h = -2h - h^2$

On calcule le rapport $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{-2h - h^2}{h} = -2 - h$

Or $\lim\limits_{h\to 0} -2 - h = -2$

Donc, g est dérivable en 2 et $g'(2) = -2$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1) Ecrire une équation de la tangente T au point d'abscisse 1 de sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
2) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.

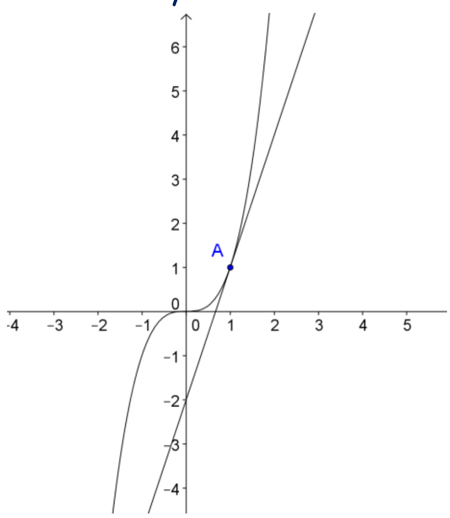
1) Une équation de T est de la forme : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Or $f'(x) = 3x^2$; donc $f'(1) = 3\times 1^2 = 3$ $\quad f(1) = 1^3 = 1$

Une équation de T est donc : $y = 3(x - 1) + 1$

Soit $y = 3x - 3 + 1$

Ou encore $y = 3x - 2$



CORRECTION

Exercice 3 : (8 points)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions données.

1) $f(x) = 5x^4$
2) $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{x}$
3) $h(x) = (2 - 3x)(5x + 2)$
4) $i(x) = \dfrac{3}{x}$
5) $j(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

1) $f'(x) = 5\times4\times x^3 = 20x^3$
2) $g'(x) = 2\times2x + \dfrac{1}{x^2} = 4x + \dfrac{1}{x^2}$
3) $h(x) = u(x)\times v(x)$ avec $u(x) = 2 - 3x$ et $v(x) = 5x + 2$
   $h'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$
   Or $u'(x) = -3$ et $v'(x) = 5$
   Donc $h'(x) = -3(5x + 2) + (2 - 3x)\times5 = -15x - 6 + 10 - 15x = -30x + 4$
   Autre méthode, on développe $h(x)$ en utilisant la double distributivité.
   $h(x) = 2\times5x + 2\times2 - 3x\times5x - 3x\times2 = 10x + 4 - 15x^2 - 6x = -15x^2 + 4x + 4$
   D'où $h'(x) = -15\times2x + 4 = -30x + 4$
4) $i'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$
5) $j(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x + 1$
   $j'(x) = \dfrac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$
   Or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$
   Donc $j'(x) = \dfrac{2(x + 1) - (2x - 1)\times1}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x + 2 - 2x + 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{3}{(x + 1)^2}$

CORRECTION

<u>Exercice 4</u> : directeur financier (4 points)

Le directeur financier d'une société a chargé un de ses services de déterminer le niveau de production de l'entreprise en comparant le prix de vente et le coût marginal.

Les données sont les suivantes :

- le coût de fabrication d'un produit, en euros, est donné par :
  $C(x) = x^3 - 24x^2 + 80x + 950$, où x désigne la quantité de produit fabriqué en kg, x est compris entre 0 et 20;
- le prix de vente d'un kilogramme de produit est de 35 €.

1) Déterminer le coût marginal $C'(x)$ en fonction de x.
2) L'entreprise produit tant que le coût marginal de production est inférieur au prix de vente unitaire.
   Déterminer le niveau de production de l'entreprise.

1) $C'(x) = 3x^2 - 24\times 2x + 80 = 3x^2 - 48x + 80$
2) Il faut résoudre l'inéquation $C'(x) < 35$

$$C'(x) < 35 \Leftrightarrow 3x^2 - 48x + 80 < 35 \Leftrightarrow 3x^2 - 48x + 80 - 35 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 48x + 45 < 0$$

Le discriminant de l'équation du second degré associée $3x^2 - 48x + 45 = 0$

est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4\times 3\times 45 = 2\,304 - 540 = 1\,764 = 42^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinct :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{48 - 42}{6} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{48 + 42}{6} = 15$$

Comme $a = 3 > 0$, $3x^2 - 48x + 48 < 0 \Leftrightarrow x \in]1; 15[$.

L'entreprise doit donc produire entre 1 et 15 kg pour respecter la condition du coût marginal inférieur au prix de vente unitaire.

CORRECTION


2500
2000
1500
1000
500
−500
−1000
−1500
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
C
(1, 35)
R
(15, 35)
C'
B