DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

Exercice 1 : Prix moyen (8 points)

Une entreprise fabrique et commercialise un produit.

Sa capacité de production, sur un mois, lui permet de réaliser entre 0 et 13 tonnes de ce produit.

On désigne par x le nombre de tonnes de produit fabriqué par l'entreprise en un mois.

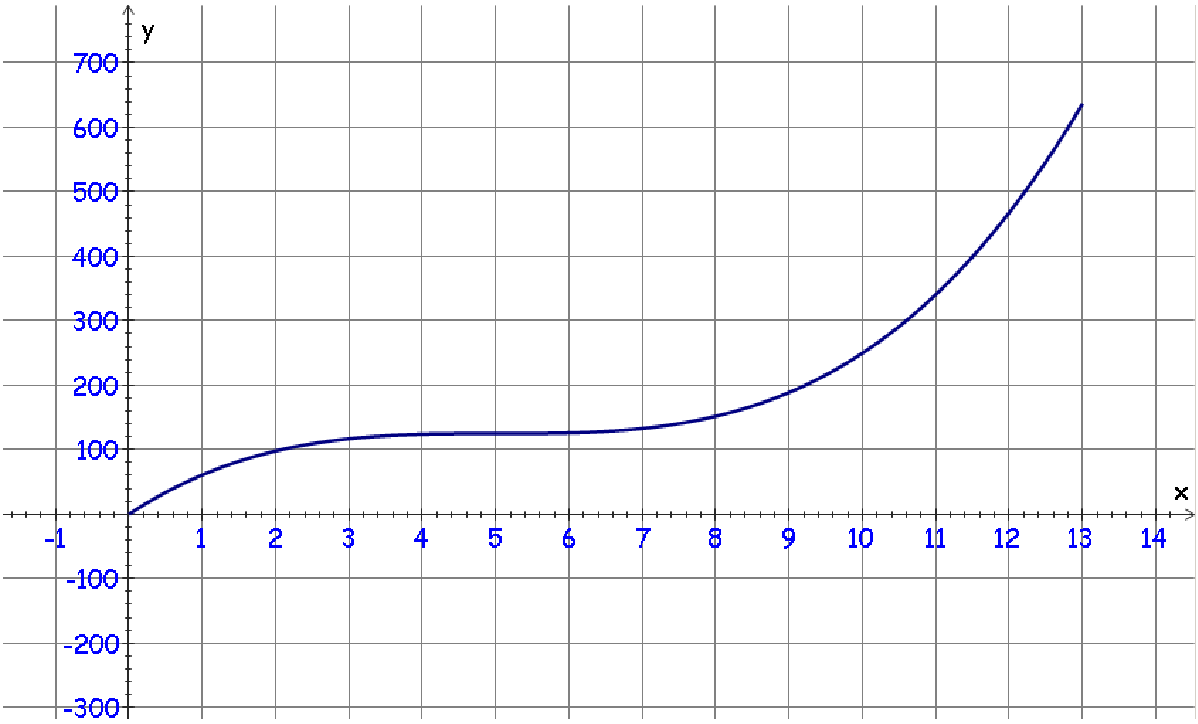
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x.$$

Cette entreprise vend l'intégralité de ce qu'elle produit au prix de 36,75 milliers d'euros la tonne.

La recette, pour x tonnes produites, est notée R(x), exprimée en milliers d'euros.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction C sur l'intervalle [0 ;13].



Partie A :

1) Calculer la recette, en milliers d'euros, pour une production de 3 tonnes puis de 10 tonnes.
2) Donner l'expression de R(x) en fonction de x.
3) Représenter la fonction R dans le repère ci-dessus.
4) a) Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

   b) Déterminer graphiquement un intervalle d'amplitude 1 dans lequel se situe la valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer le plus précisément, à l'aide de la calculatrice, cette valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

1) On désigne par B(x) le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle [5 ;10].

   Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38{,}25x$.

2) A l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction B avec un pas de 0,1 pour des valeurs de x comprises entre 8 et 9.
   (Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.)

3) A l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variations de la fonction B. (Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.)

4) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximal ?

   Quelle est alors la valeur de ce maximum en milliers d'euros ?

<u>Exercice 2</u> : (7 points)

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil avec six portes de sortie numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. La loi de X est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante
Un joueur mise 2 €, il reçoit 12 € si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 € si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur après une partie (compté positivement ou négativement).

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) Calculer l'espérance de Y.
   Le jeu est-il équitable ?

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum 3 parties (si on va en finale). A chaque rencontre, Guillaume a une probabilité de gagner égale à 0,6.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Guillaume.

1) Montrer que $P(X = 2) = 0{,}24$.
2) Donner la loi de probabilité de X.
3) Calculer son espérance mathématique.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

Exercice 1 : Laboratoire pharmaceutique (8 points)

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un produit. Ce laboratoire peut produire de 5 à 30 kg du produit par semaine.

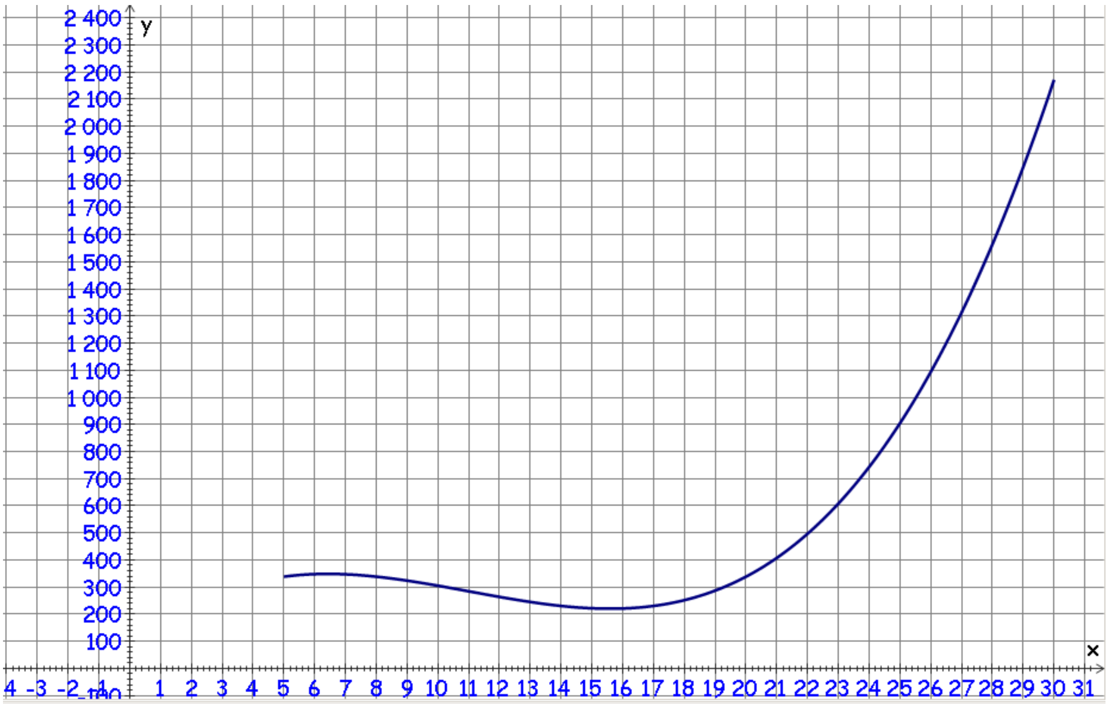
Partie A : étude graphique du bénéfice

On désigne par x la masse de produit fabriqué par le laboratoire par semaine (exprimée en kg).

Le coût total de production, exprimé en euros, est donné par :

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 100x + 72, \text{ où } x \text{ appartient à l'intervalle } [5\ ;30].$$

La courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle [5 ;30] est donnée ci-dessous.



1) Par lecture graphique, estimer la quantité dont le coût total de production est de 600 € le kg.

2) a) Après une étude de marché, le prix de vente du produit a été estimé à 60 euros le kg. Donner en fonction de x, l'expression R(x) de la fonction R modélisant la recette.

b) Représenter la fonction R sur le même graphique que celui de la fonction C.

c) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x, l'entreprise réalise un bénéfice.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

Partie B : Graphique du bénéfice

Le bénéfice réalisé par l'entreprise est la différence entre la recette et le coût de production.

1) Montrer que ce bénéfice est modélisé par la fonction B dont l'expression est :

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72, \text{ où } x \text{ appartient à l'intervalle } [5 ;30].$$

2) A l'aide de la calculatrice :
   a) Conjecturer pour quelle valeur de x, B admet un maximum sur [5 ;30]
   b) Conjecturer les variations de B ;
   c) En déduire le tableau de variations de B sur l'intervalle [5 ;30].

   Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.

3) On considère que la production est entièrement vendue.
Donner la valeur du bénéfice maximal ainsi que la masse du produit correspondante.

<u>Exercice 2</u> : (7 points)

Un particulier crée un jeu de loterie instantanée pour lequel 500 tickets ont été imprimés. Les tickets gagnants se répartissent de la manière suivante :
1 ticket fait gagner 300 €, 4 tickets font gagner 50 €, 5 tickets font gagner 20 € et 90 tickets font gagner 2 €.
Le prix de vente du ticket est 2 €.
On appelle *G* la variable aléatoire qui, à chaque ticket tiré au hasard, associe le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre le gain réalisé est le prix du ticket.

1) Déterminer la loi de probabilité de *G*.
2) Calculer et interpréter l'espérance mathématique de *G*.

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

Une roue de loterie est formée de deux secteurs, de couleurs bleue et rouge.

La probabilité qu'elle s'arrête sur le secteur bleu est $\frac{1}{3}$.

On fait tourner la roue deux fois de suite.

1) Construire un arbre modélisant l'expérience.
2) On note X la variable aléatoire associée nombre de fois où la roue s'arrête sur un secteur bleu.
   Donner la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

Exercice 1 : **Prix moyen** (8 points)

Une entreprise fabrique et commercialise un produit.

Sa capacité de production, sur un mois, lui permet de réaliser entre 0 et 13 tonnes de ce produit.

On désigne par x le nombre de tonnes de produit fabriqué par l'entreprise en un mois.

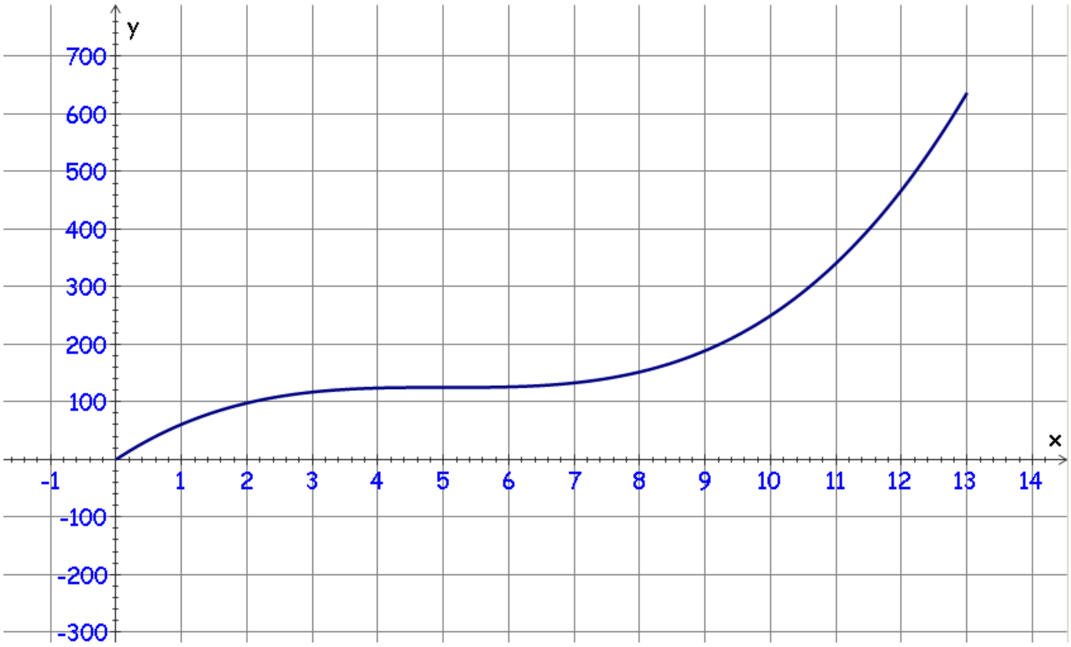
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x.$$

Cette entreprise vend l'intégralité de ce qu'elle produit au prix de 36,75 milliers d'euros la tonne.

La recette, pour x tonnes produites, est notée R(x), exprimée en milliers d'euros.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction C sur l'intervalle [0 ;13].



Partie A

1) Calculer la recette, en milliers d'euros, pour une production de 3 tonnes puis de 10 tonnes.

2) Donner l'expression de R(x) en fonction de x.

3) Représenter la fonction R dans le repère ci-dessus.

4) a) Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

   b) Déterminer graphiquement un intervalle d'amplitude 1 dans lequel se situe la valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

Partie A

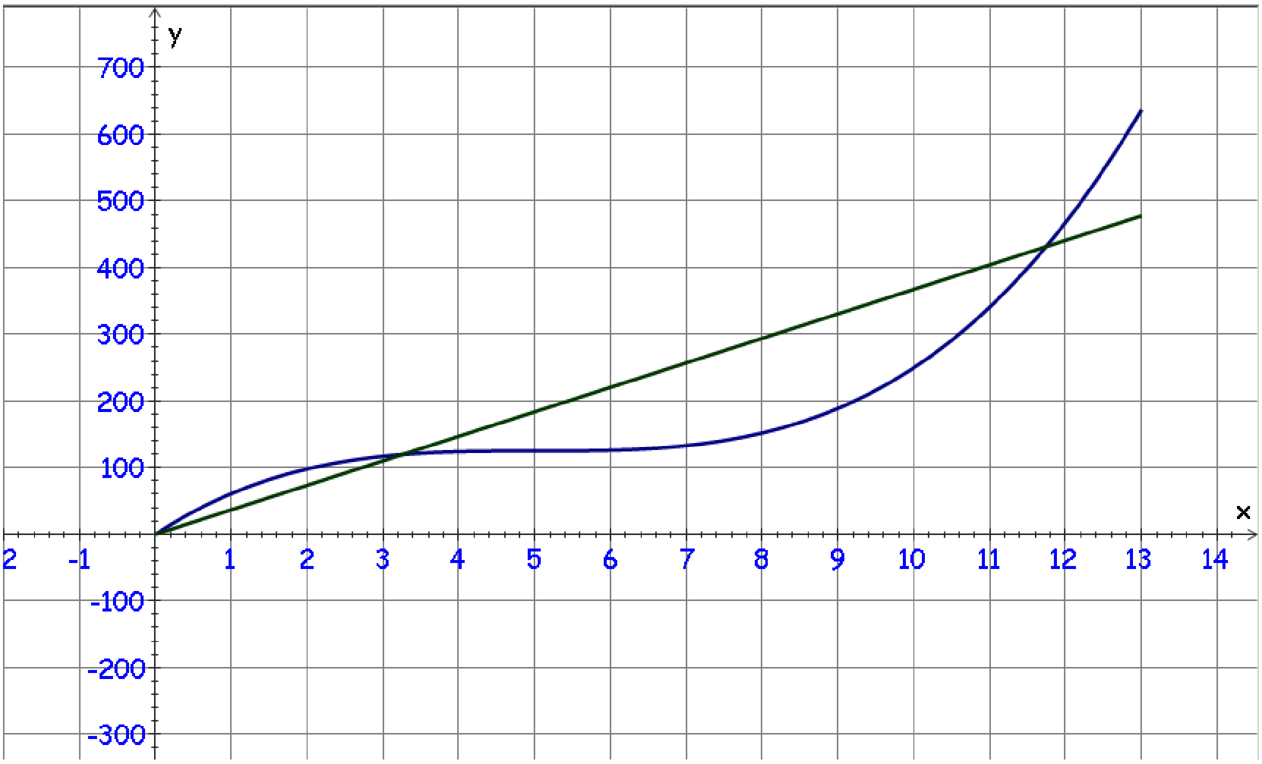
1) Pour 3 tonnes produites, la recette est $36{,}75 \times 3 = 110{,}25$ k€.

   Pour 10 tonnes produites, la recette est $36{,}75 \times 10 = 367{,}5$ k€

2) $R(x) = 36{,}75 \times x$

   R est une fonction linéaire. Sa représentation graphique sur [0 ;13] est un segment.

3)



4) a) L'entreprise réalise un bénéfice si $R(x) > C(x)$.

   On lit les abscisses des points de la droite $\mathcal{D}_R$ situés au dessus de la courbe $\mathcal{C}_C$.

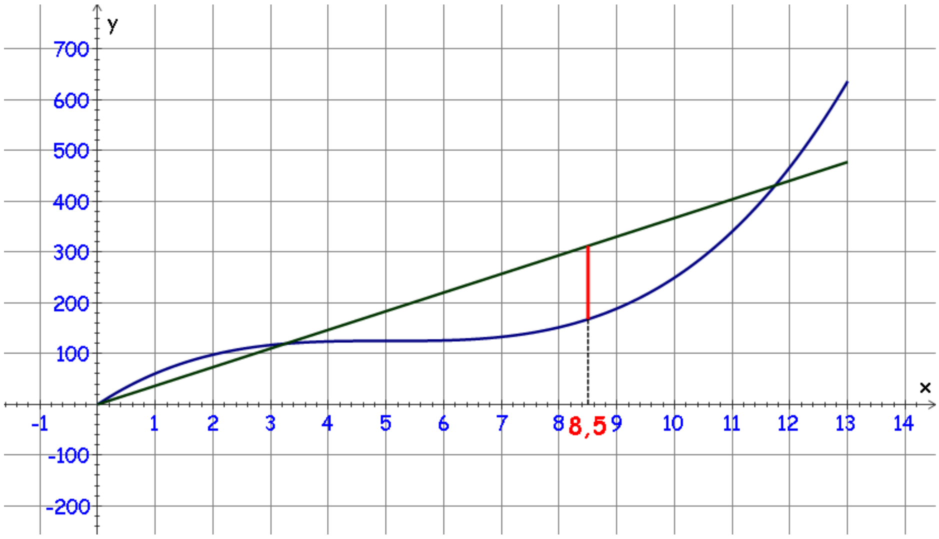
   On lit environ : $x \in [3{,}3 ;11{,}7]$.

   L'entreprise réalise un bénéfice pour un nombre d'objets produits compris environ entre 3,3 tonnes et 11,7 tonnes.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

b)



Le bénéfice est maximal lorsque la différence R(x) – C(x) est maximale.

Cela se produit pour x ∈ [8 ;9].

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer le plus précisément, à l'aide de la calculatrice, cette valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximal.

1) On désigne par B(x) le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle [5 ;10].

   Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38{,}25x$.

2) A l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction B avec un pas de 0,1 pour des valeurs de x comprises entre 8 et 9.
   (Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.)

3) A l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle [5;10].

   (Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.)

4) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximal ?

   Quelle est alors la valeur de ce maximum en milliers d'euros ?

1) $B(x) = R(x) - C(x) = 36{,}75x - (x^3 - 15x^2 + 75x) = -x^3 + 15x^2 + 36{,}75x - 75x$

   $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38{,}25x$.

2)

x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9
B(x)	142,0	142,9	143,6	144,1	144,4	144,5	144,4	144,1	143,5	142,8	141,8

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

3) Tableau de variations de B :

x	5	8,5	10
Variations de B	58,7 ↗	144,5	↘ 117,5

4) La valeur de x qui assure un bénéfice maximal est 8,5.
La valeur de ce maximum est 144 500 €.

Exercice 2 : (7 points)

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil avec six portes de sortie numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. La loi de X est donnée par :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante
Un joueur mise 2 €, il reçoit 12 € si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 € si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur après une partie(compté positivement ou négativement).

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.
2) Calculer l'espérance mathématique de Y.
   Le jeu est-il équitable ?

1)

Les valeurs possibles prises par Y sont : 12 – 2 = 10 € ; 2 – 2 = 0 € et 0 – 2 = -2 €.

$P(Y = -2 €) = P(X = 2) + P(X = 5) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$

$P(Y = 0 €) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{20}{32} = \frac{10}{16}$

$P(Y = 10 €) = P(X = 1) + P(X = 6) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

D'où le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y :

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

y_i	-2	0	10
$P(Y = y_i)$	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{1}{16}$

2) Pour déterminer si le jeu est équitable on calcule l'espérance mathématique de Y.

$E(Y) = -2\times\frac{5}{16} + 0\times\frac{10}{16} + 10\times\frac{1}{16} = \frac{-10}{16} + \frac{10}{16} = 0$

Comme l'espérance de gain du joueur est nulle, alors le jeu est équitable.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

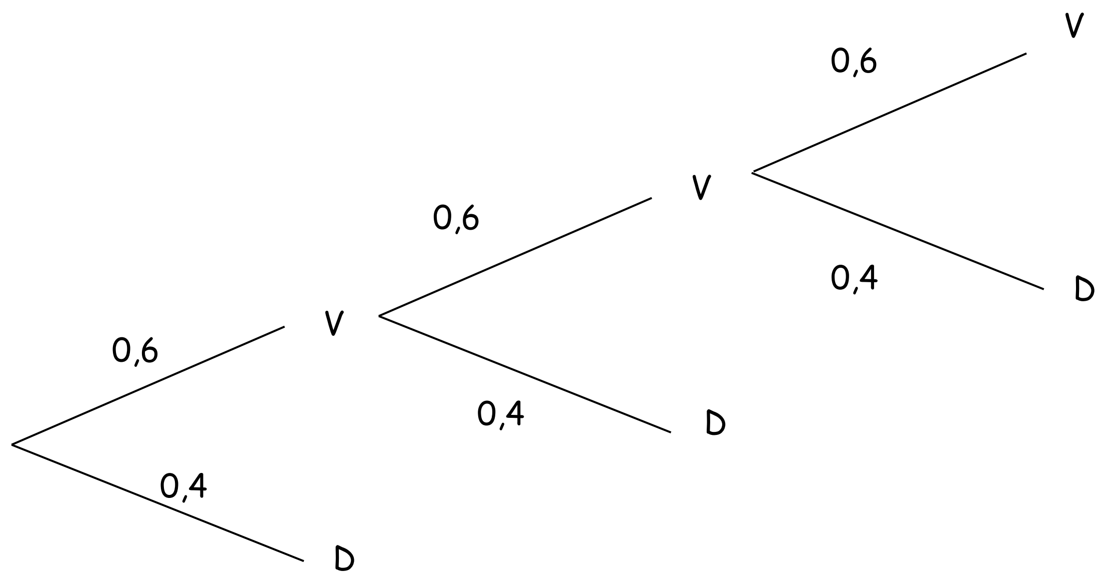
Exercice 3 : (5 points)

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum 3 parties (si on va en finale). A chaque rencontre, Guillaume a une probabilité de gagner égale à 0,6.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Guillaume.

1) Montrer que $P(X = 2) = 0,24$.
2) Donner la loi de probabilité de X.
3) Calculer son espérance mathématique.

1) Si X = 2, alors Guillaume a gagné son premier match et perdu le deuxième.
   On a donc $P(X = 2) = 0,6\times(1 - 0,4) = 0,6\times0,4 = 0,24$
2) On peut représenter la situation par un arbre de probabilités :



- 1 match joué correspond à l'événement D et $p(D) = 0,4$.
- 2 matchs joués correspondent à l'événement VD et $p(VD) = 0,6\times0,4 = 0,24$
- 3 matchs joués correspondent aux événements VVV et VVD
  $p(VVV) + p(VVD) = 0,6\times0,6\times0,6 + 0,6\times0,6\times0,4 = 0,216 + 0,144 = 0,36$

On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,4	0,24	0,36

On vérifie que : $0,4 + 0,24 + 0,36 = 1$

3) L'espérance mathématique de X est : $E(X) = 1\times0,4 + 2\times0,24 + 3\times0,36 = 1,96$.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

Exercice 1 : Laboratoire pharmaceutique (8 points)

Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un produit. Ce laboratoire peut produire de 5 à 30 kg du produit par semaine.

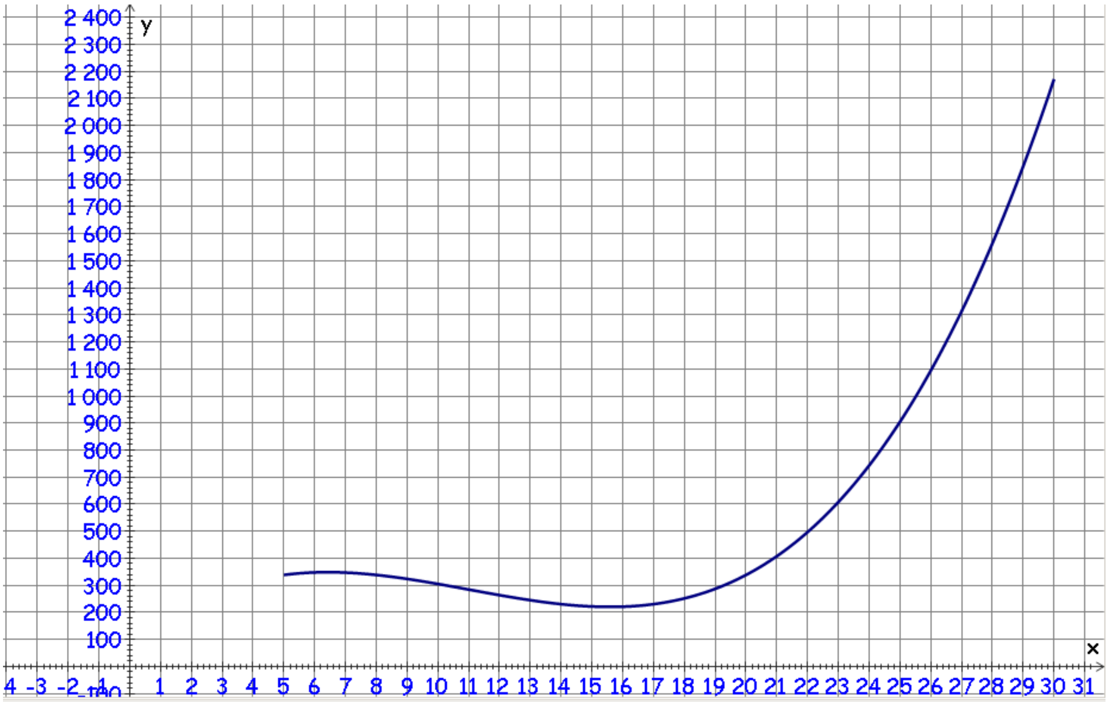
Partie A : étude graphique du bénéfice

On désigne par x la masse de produit fabriqué par le laboratoire par semaine (exprimée en kg).

Le coût total de production, exprimé en euros, est donné par :

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 100x + 72, \text{ où } x \text{ appartient à l'intervalle } [5\ ;30].$$

La courbe représentative de la fonction C sur l'intervalle [5 ;30] est donnée ci-dessous.



1) Par lecture graphique, estimer la quantité dont le coût total de production est de 600 € le kg.

2) a) Après une étude de marché, le prix de vente du produit a été estimé à 60 euros le kg. Donner en fonction de x, l'expression R(x) de la fonction R modélisant la recette.

b) Représenter la fonction R sur le même graphique que celui de la fonction C.

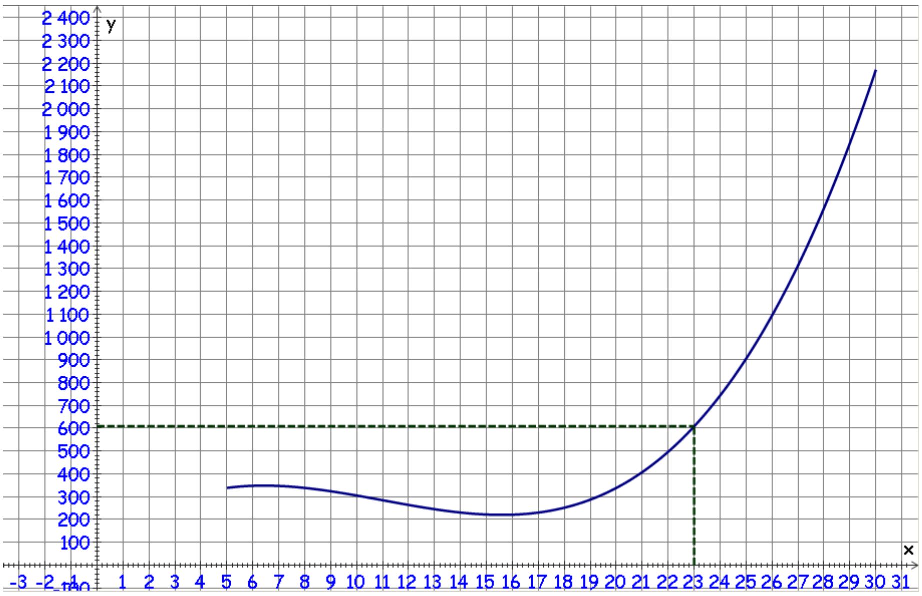
c) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x, l'entreprise réalise un bénéfice.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

1) On lit l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée égale à 600.

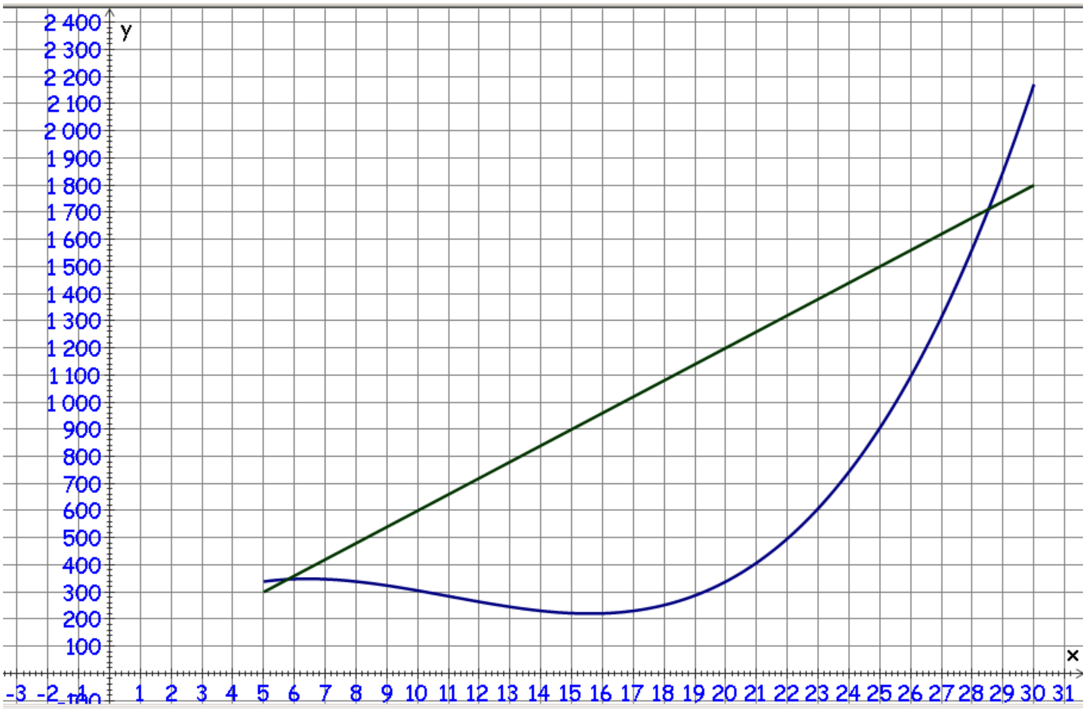
On lit environ 23 €.



Pour environ 23 kg, le coût total de production est 600 €.

2) a) R(x) = 60x

b) R est une fontion linéaire dont la représentation graphique sur l'intervalle [5 ;30] est un segment.



DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

c) L'entreprise réalise un bénéfice si $R(x) > C(x)$.

Graphiquement, on lit les abscisses des points du segment de droite situés au dessus de la courbe représentant la fonction C.

On lit environ : $x \in [5{,}8 ;28{,}5]$.

Le laboratoire réalise un bénéfice pour une quantité de produit comprise entre 5,8 kg et 28,5 kg (environ).

Partie B : Graphique du bénéfice

Le bénéfice réalisé par l'entreprise est la différence entre la recette et le coût de production.

1) Montrer que ce bénéfice est modélisé par la fonction B dont l'expression est :

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 11x^2 - 40x - 72, \text{ où } x \text{ appartient à l'intervalle } [0 ;30].$$

2) A l'aide de la calculatrice :
   a) conjecturer pour quelle valeur de x, B admet un maximum sur [5 ;30]
   b) conjecturer les variations de B ;
   c) en déduire le tableau de variations de B sur l'intervalle [5 ;30].

   Les valeurs numériques seront données à 0,1 près.

3) a) On considère que la production est entièrement vendue.
   Donner la valeur du bénéfice maximal ainsi que la masse du produit correspondante.

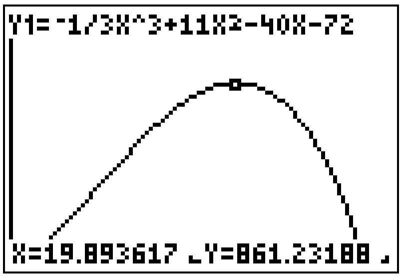
1) $B(x) = R(x) - C(x) = 60x - \frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 100x + 72$

$$B(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 11x^2 + 60x - 100x - 72 = -\frac{1}{3}x^3 - 11x^2 - 40x - 72$$

2) On trace la courbe représentant la fonction B sur l'intervalle [5 ;30] avec la calculatrice en choisissant comme fenêtre graphique : XMin = 5, XMax = 30, YMin = 0 et YMax = 1200.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION



a) On conjecture que le maximum de B est atteint en x = 20.

b) B est croissante sur [5 ;20] et décroissante sur [20 ;30].

c) Tableau des variations de B :

x	5	20	30
Variations de B	-38,7	861,3	-372

3) a) La quantité à produire pour réaliser un bénéfice maximal est égale à 20 kg. (valeur de x pour le maximum de la fonction B).

Le bénéfice maximal est égal à B(20) ≈ 861 € (arrondi à l'euro près).

<u>Exercice 2</u> : (7 points)

Un particulier crée un jeu de loterie instantanée pour lequel 500 tickets ont été imprimés. Les tickets gagnants se répartissent de la manière suivante :
1 ticket fait gagner 300 €, 4 tickets font gagner 50 €, 5 tickets font gagner 20 € et 90 tickets font gagner 2 €.
Le prix de vente du ticket est 2 €.
On appelle G la variable aléatoire qui, à chaque ticket tiré au hasard, associe le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre le gain réalisé est le prix du ticket.

1) Déterminer la loi de probabilité de G.
2) Calculer et interpréter l'espérance mathématique de G.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

1) Les valeurs possibles prises par G sont :

- $300 - 2 = 298$ € avec une probabilité de $\frac{1}{500}$;
- $50 - 2 = 48$ € avec une probabilité de $\frac{4}{500} = \frac{1}{125}$
- $20 - 2 = 18$ € avec une probabilité de $\frac{5}{500} = \frac{1}{100}$
- $2 - 2 = 0$ € avec une probabilité de $\frac{90}{500} = \frac{9}{50}$
- $0 - 2 = -2$ € avec une probabilité de $\frac{500 - (1 + 4 + 5 + 90)}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$

On en déduit le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire G :

x_i	-2	0	18	48	298
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{500}$

On vérifie que : $\frac{4}{5} + \frac{9}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{125} + \frac{1}{500} = \frac{400 + 90 + 5 + 4 + 1}{500} = \frac{500}{500} = 1$

2) L'espérance mathématique de G est :

$$E(G) = -2\times\frac{4}{5} + 0\times\frac{9}{50} + 18\times\frac{1}{100} + 48\times\frac{1}{125} + 298\times\frac{1}{500} = \frac{-800 + 90 + 192 + 298}{500} =$$

$$\frac{-222}{500} = -0,44$$

L'espérance mathématique est aussi l'espérance de gain du joueur.

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

Comme cette espérance est négative, alors le jeu rapportera de l'argent au particulier (en moyenne 0,476 € par billet vendu : soit environ 238 € pour les 500 billets).

Exercice 3 : (5 points)

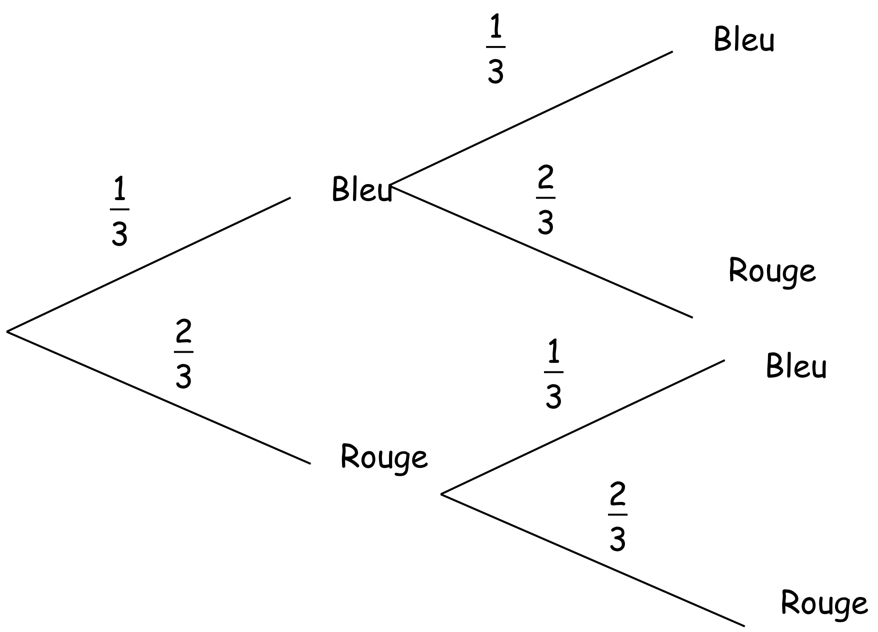
Une roue de loterie est formée de deux secteurs, de couleurs bleue et rouge.

La probabilité qu'elle s'arrête sur le secteur bleu est $\frac{1}{3}$.

On fait tourner la roue deux fois de suite.

1) Construire un arbre modélisant l'expérience.
2) On note X la variable aléatoire associée nombre de fois où la roue s'arrête sur un secteur bleu.
   Donner la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance mathématique de X.

1)



2) Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ; 1 et 2.

- X = 0 correspond à l'événement RR avec une probabilité de : $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$
- X = 1 correspond aux événements BR et RB avec une probabilité de :

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

DS2 fonctions numériques et variables aléatoires

CORRECTION

- $X = 2$ correspond à l'événement BB avec une probabilité de : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

On en déduit le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

On vérifie que $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

3) L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 0\times\frac{4}{9} + 1\times\frac{4}{9} + 2\times\frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$