

La calculatrice est autorisée.

Ne pas oublier de rendre la feuille annexe avec votre copie.

Exercice 1 : QCM sur les pourcentages (5 points)

Reporter sur votre copie le numéro de la question et votre réponse.

On ne demande pas de justification.

- 1) Jean désire acheter une automobile qui, neuve, vaut 13 500€.

Jean dit que l'achat de l'automobile représente 60% de son budget.

Le budget dont dispose Jean est de :

- a. 20 000 € b. 8 100 € c. 22 500 € d. 21 600 €.

- 2) Pour un prix de 100 €, une augmentation de 2 € correspond à :

- a. Une hausse de 2% b. Une hausse de 102% c. Une multiplication par 0,02.

- 3) A 19h, dans un magasin qui fait nocturne, on compte 1500 clients et seulement 200 clients à 21h. La fréquentation a baissé à l'unité près, de :

- a. 13% b. 75% c. 87%.

- 4) Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50% puis une seconde fois de 50%, alors le prix du baril :

- a. a doublé b. a augmenté de 100%
c. a augmenté de 225% d. a augmenté de 125%.

- 5) Le 1^{er} janvier la valeur d'une action a baissé de 15%.

Le 2 janvier, l'action retrouve sa valeur de la veille (le 1^{er} janvier).

Quel est le pourcentage d'évolution de la valeur de l'action entre le 1^{er} janvier et le 2 janvier ?

- a. une hausse de 15% b. une hausse de 13% environ c. une hausse de 18% environ

Exercice 2 (3 points)

Un capital de 10 000 € est placé à un taux de $t\%$ puis l'année suivante au taux de $(t + 2)\%$.

Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 11 235 €.

- 1- Expliquez pourquoi t est solution de l'équation $t^2 + 202t - 1035 = 0$.

(Toute recherche ici sera valorisée.)

- 2- Calculez le taux t en indiquant votre démarche.

Exercice 3 : Problème en lien avec l'économie (12 points)

Une usine fabrique des appareils électro-ménagers pour une chaîne de magasins.

Elle peut produire au maximum 300 appareils par jour.

Le coût total de fabrication journalier, en euros, est donné en fonction de la quantité q d'appareils par :

$$C(q) = 0,06q^2 + 43,36q + 2\,560 \text{ avec } q \text{ appartenant à l'intervalle } [0 ; 300].$$

Chaque appareil produit est vendu à 79 euros.

1) a) Quelle est la recette associée à la vente de 60 appareils ?

b) Quels sont les coûts associés à la vente de 60 appareils ?

L'entreprise a-t-elle réalisé un bénéfice. Pourquoi ?

On rappelle que : **Bénéfice = Recette - coût total de fabrication.**

2) L'entreprise fabrique cette fois 200 appareils.

Calculer le bénéfice réalisé pour la fabrication et la ventes des 200 appareils.

3) L'entreprise fabrique cette fois une quantité quelconque q appareils et souhaite étudier le bénéfice à réaliser en fonction de q .

a) Exprimer la recette $R(q)$, en euros en fonction de la quantité q d'appareils produits par jour.

b) Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, en euros, en fonction de la quantité q d'appareils fabriqués et vendus est :

$$B(q) = -0,06q^2 + 35,64q - 2560.$$

c) Résoudre l'inéquation $B(q) \geq 0$ et interpréter le résultat.

4) a) Montrer que pour tout réel q de $[0 ; 300]$,

$$B(q) = -0,06(q - 297)^2 + 2732,54.$$

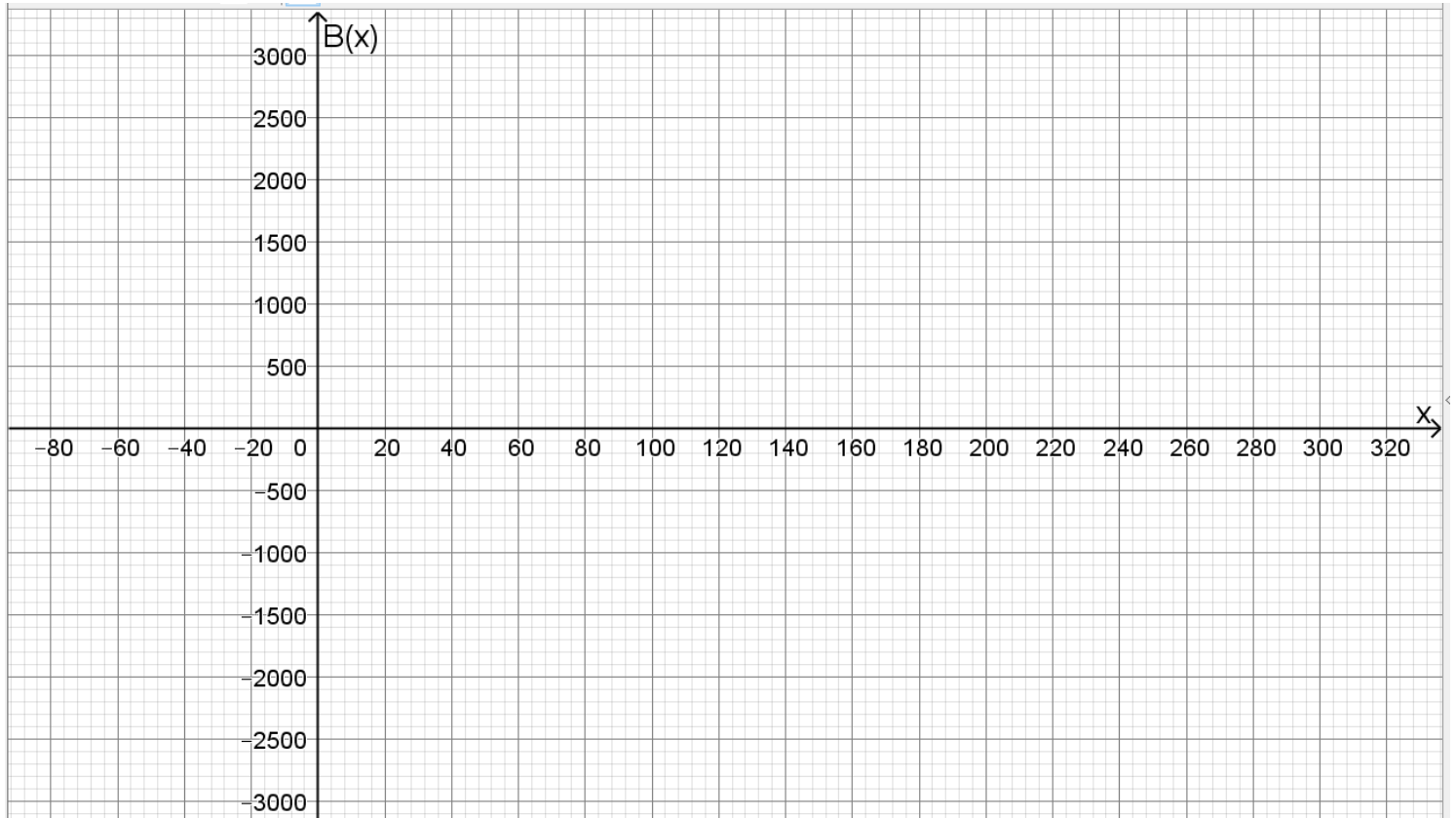
b) En déduire que le bénéfice admet un maximum dont on donnera la valeur et la quantité associée d'appareils fabriqués et vendus.

5) a) Sur la feuille annexe, placez le sommet de la parabole représentant la fonction bénéfice.

b) Tracer cette parabole en respectant les contraintes de l'entreprise.

ANNEXE

NOM :	Prénom :
-------	----------



CORRECTION

Exercice 1 : QCM sur les pourcentages (5 points)

Reporter sur votre copie le numéro de la question et votre réponse.

On ne demande pas de justification.

- 1) Jean désire acheter une automobile qui, neuve, vaut 13 500€.

Jean dit que l'achat de l'automobile représente 60% de son budget.

Le budget dont dispose Jean est de :

- b. 20 000 € b. 8 100 € c. 22 500 € d. 21 600 €.

- 2) Pour un prix de 100 €, une augmentation de 2 € correspond à :

- a. Une hausse de 2% b. Une hausse de 102% c. Une multiplication par 0,02.

- 3) A 19h, dans un magasin qui fait nocturne, on compte 1500 clients et seulement 200 clients à 21h. La fréquentation a baissé à l'unité près, de :

- b. 13% b. 75% c. 87%.

- 4) Si le prix du baril de pétrole augmente une première fois de 50% puis une seconde fois de 50%, alors le prix du baril :

- a. a doublé b. a augmenté de 100%
c. a augmenté de 225% d. a augmenté de 125%.

- 5) Le 1^{er} janvier la valeur d'une action a baissé de 15%.

Le 2 janvier, l'action retrouve sa valeur de la veille (le 1^{er} janvier).

Quel est le pourcentage d'évolution de la valeur de l'action entre le 1^{er} janvier et le 2 janvier ?

- a. une hausse de 15% b. une hausse de 13% environ c. une hausse de 18% environ

1) Le budget de Jean est $\frac{13\,500}{0,6} = 22\,500$ € (réponse c))

2) Pour un prix de 100 €, une augmentation de 2 € correspond à une hausse de $\frac{2}{100} = 2\%$

(réponse a))

3) La fréquentation a baissé de $\frac{200 - 1500}{1500} = -\frac{1300}{1500} \approx -0,87$ soit environ - 87% (réponse c))

4) Le coefficient multiplicateur global associé à deux hausses de 50% est

$CM = \left(1 + \frac{50}{100}\right)^2 = 1,5^2 = 2,25 = 1 + \frac{125}{100}$ soit une hausse de 125% (réponse d))

CORRECTION

5) Le coefficient multiplicateur cherché vérifié $CM \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 1$

D'où $CM = \frac{1}{0,85} \approx 1,18\%$ soit une hausse d'environ 18% (réponse c).

Exercice 2 (3 points)

Un capital de 10 000 € est placé à un taux de $t\%$ puis l'année suivante au taux de $(t + 2)\%$.

Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 11 235 €.

1- Expliquez pourquoi t est solution de l'équation $t^2 + 202t - 1035 = 0$.

(Toute recherche ici sera valorisée.)

2- Calculez le taux t en indiquant votre démarche.

1) Le coefficient multiplicateur global associé aux deux hausses est $CM = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right)$.

CM vérifie l'équation $CM = \frac{11\,235}{10\,000}$

$$\begin{aligned} CM = \frac{11\,235}{10\,000} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right) = \frac{11\,235}{10\,000} \\ &\Leftrightarrow 100 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times 100 \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right) = \frac{11\,235}{10\,000} \times 100 \times 100 \\ &\Leftrightarrow (100 + t)(100 + t + 2) = \frac{11\,235}{10\,000} \times 100 \times 100 \\ &\Leftrightarrow 10\,000 + 100t + 200 + 100t + t^2 + 2t = 11\,235 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 202t + 10\,200 - 11\,235 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 202t - 1\,035 = 0 \end{aligned}$$

2) Le discriminant associé à cette équation du second degré est : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 202^2 - 4 \times 1 \times (-1\,035) = 40\,804 + 4\,140 = 44\,944 = 212^2$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $t^2 + 202t - 1\,035 = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-202 - 212}{2 \times 1} = -207 \text{ et } t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-202 + 212}{2 \times 1} = 5.$$

Seule la solution positive convient : $t_2 = 5$.

$$\text{Vérification : } \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 1,05 \times 1,07 = 1,1235 = \frac{11\,235}{10\,000}$$

Le taux cherché est donc $t = 5$ (soit 5%).

CORRECTION

Exercice 3 : Problème en lien avec l'économie (12 points)

Une usine fabrique des appareils électro-ménagers pour une chaîne de magasins.

Elle peut produire au maximum 300 appareils par jour.

Le coût total de fabrication journalier, en euros, est donné en fonction de la quantité q d'appareils par :

$$C(q) = 0,06q^2 + 43,36q + 2\,560 \text{ avec } q \text{ appartenant à l'intervalle } [0 ; 300].$$

Chaque appareil produit est vendu à 79 euros.

1) a) Quelle est la recette associée à la vente de 60 appareils ?

b) Quels sont les coûts associés à la vente de 60 appareils ?

L'entreprise a-t-elle réalisé un bénéfice. Pourquoi ?

On rappelle que : **Bénéfice = Recette - coût total de fabrication.**

2) L'entreprise fabrique cette fois 200 appareils.

Calculer le bénéfice réalisé pour la fabrication et la ventes des 200 appareils.

3) L'entreprise fabrique cette fois une quantité quelconque q appareils et souhaite étudier le bénéfice à réaliser en fonction de q .

a) Exprimer la recette $R(q)$, en euros en fonction de la quantité q d'appareils produits par jour.

b) Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, en euros, en fonction de la quantité q d'appareils fabriqués et vendus est :

$$B(q) = -0,06q^2 + 35,64q - 2560.$$

c) Résoudre l'inéquation $B(q) \geq 0$ et interpréter le résultat.

4) a) Montrer que pour tout réel q de $[0 ; 300]$,

$$B(q) = -0,06(q - 297)^2 + 2732,54.$$

b) En déduire que le bénéfice admet un maximum dont on donnera la valeur et la quantité associée d'appareils fabriqués et vendus.

5) a) Sur la feuille annexe, placez le sommet de la parabole représentant la fonction bénéfice.

b) Tracer cette parabole en respectant les contraintes de l'entreprise.

CORRECTION

1) a) $79 \times 60 = 4\,760 \text{ €}$

La recette associée à la vente de 60 appareils est de 4 760 €.

b) $C(60) = 0,06 \times 60^2 + 43,36 \times 60 + 2\,560 = 5\,377,6$

Les coûts associés à la vente de 60 appareils sont de 5 377,60 €.

Comme $4\,760 < 5\,377,6$, l'entreprise ne réalise pas de bénéfice pour la vente de 60 appareils.

2) Le bénéfice pour la vente de 200 appareils est :

$$79 \times 200 - C(200) = 15\,800 - (0,06 \times 200^2 + 43,36 \times 200 + 2\,560) = 15\,800 - 13\,632 = 2\,168 \text{ €}$$

3) a) $R(q) = 79q$

b) $B(q) = R(q) - C(q) = 79q - (0,06q^2 + 43,36q + 2\,560) = 79q - 0,06q^2 - 43,36q - 2\,560$

$$B(q) = -0,06q^2 + 35,64q - 2\,560$$

c) Le discriminant de l'équation $B(q) = 0$ est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 35,64^2 - 4 \times (-0,06) \times (-2\,560) = 655,8096$$

Comme $\Delta > 0$, cette équation du second degré admet deux solutions :

$$q_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-35,64 - \sqrt{655,8096}}{2 \times (-0,06)} \approx 510,41$$

$$\text{et } q_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-35,64 + \sqrt{655,8096}}{2 \times (-0,06)} \approx 83,59$$

Une seule valeur q_2 est comprise entre 0 et 300.

Comme $a = -0,06 < 0$, alors $B(q) \geq 0$ si $q \in [q_2; 300]$.

Interprétation : l'entreprise réalise un bénéfice à partir de 84 appareils vendus.

$$\begin{aligned} 4) \text{ a) } -0,06(q - 297)^2 + 2732,54 &= -0,06 \times (q^2 - 2 \times q \times 297 + 297^2) + 2732,54 \\ &= -0,06q^2 + 0,06 \times 594q - 0,06 \times 88\,209 + 2732,54 \\ &= -0,06q^2 + 35,64q - 2\,560 \\ &= B(q) \end{aligned}$$

$-0,06(q - 297)^2 + 2732,54$ est la forme canonique du polynôme du second degré B .

b) Comme $a = -0,06 < 0$, alors B admet un maximum égal à 2732,54 et atteint pour $q = 297$.

Le bénéfice maximal est égal à 2 732,54 € pour 297 appareils vendus.

5)

